ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Невена Събева

ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ

София, 2007 г.

За Турнира на градовете

Турнирът на градовете е едно от най-масовите и интересни международни състезания по математика за ученици. Той стартира през 1980 г. в Москва, като от 1989 г. се провежда в два тура – есенен и пролетен. Днес в Турнира участват ученици от повече от 100 града в 25 държави.

Участниците са разделени в две възрастови групи и на всяка група се предлагат два състезателни варианта – тренировъчен и основен. Резултатът от всеки вариант се формира по трите най-добре решени задачи. За крайното индивидуално класиране се зачита най-добрият резултат от всички варианти.

Задачите от тренировъчните варианти са предназначени за широк кръг ученици. Решението им не предполага допълнителна теоретична подготовка и са подходящи за начинаещи. Нетрадиционо формулирани, тези задачи провокират в учениците интерес към олимпиадната математика.

Оновните варианти са съпоставими по характер и трудност с темите от Националната и Международната олимпиада по математика. Оригиналните идеи, заложени от авторите, превръщат решаването на задачите в творческо предизвикателство.

От създаването на Турнира негова основна движеща сила е ентусиазмът на математиците. Те са го предали на поколения ученици, които са имали възможността да се докоснат до очарованието на математиката.

За сборника

Настоящият сборник включва задачите от 28. Турнир на градовете и избрани задачи от предишните издания на Турнира. Задачите са придружени с подробни решения и могат да се използват при подготовка и самоподготовка за математически състезания. Включени са задачи с различна сложност и разнообразни по тематика и методи на решаване. Разделянето по теми е в голяма степен условно, тъй като често решението на една задача комбинира различни идеи.

От автора

София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02) 979-28-36, e-mail: newena@math.bas.bg
София, 2007 г.
ISBN 978-954-9526-38-7

СЪДЪРЖАНИЕ

28. Международен Турнир на градовете

28. Международен Турнир на градовете

Есенен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. В правилен седмоъгълник е вписана окръжност и около него е описана окръжност. Същата операция е направена и с правилен 17-ъгълник. Така двата многоъгълника са затворени в пръстени, които имат равни лица. Да се докаже, че двата многоъгълника имат равни страни.

Решение: Да означим с $2a$ страната на правилен многоъгълник, а с r и R съответно радиусите на вписаната и описаната окръжност. Вписаната окръжност се допира до страните в средите им и радиусите са перпендикулярни на страните. От питагоровата теорема намираме $a^2 + r^2 = R^2$. Тъй като лицето на пръстена е равно на $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$, получаваме твърдението на задачата.

Задача 2. Постъпвайки на нова работа, Ани винаги се интересува кои от нейните колеги се познават. За да запомни по-лесно тази информация, тя рисува окръжност и представя всеки колега като хорда. При това, ако две хорди се пресичат, то съответните хора се познават, а ако не се пресичат, то съответните колеги не се познават. Ани е сигурна, че това винаги е възможно. Права ли е тя? (Ако две хорди имат общ връх, считаме, че те се пресичат.)

Решение: Ще покажем контрапример, откъдето ще следва, че Ани не е права. Да разгледаме домакин, трите му сина и трима гости. Измежду гостите няма познати, домакинът ги познава и тримата, а тримата му сина се познават с трите различни двойки от гостите. Хордите на гостите пресичат хордата на домакина в три различни точки. Гостенинът, съответстващ на средната точка ще наречем среден, а другите двама - крайни. Ясто е, че крайните хорди са от различни страни на средната. Хордата на сина, познаващ само крайните гости, трябва да пресече крайните хорди, но да не пресича средната, което е противоречие.

Задача 3. Квадратът

a	b	c
d	e	f
g	h	i

е магически: сборът на числата във всеки ред, стълб и в двата диагонала е един и същ. Докажете, че:

а) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

б) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

Решение: а) Като прибавим към двете страни на равенството в а) сбора $b+d+f+h$, получаваме еквивалентно равенство, което може да се запише във вида

$$\begin{aligned} & (a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i)= \\ = \; & 2(b+e+h)+2(d+e+f) \end{aligned}$$

Тъй като сборът на числата във всеки ред, стълб и диагонал е един и същ, последното равенство очевидно е изпълнено.

б) Да означим с S сбора на числата във всеки ред. Тогава $a+i=c+g=b+h=d+f=S-e$. Като заместим в равенството от а), получаваме $4(S-e)=2(S-e)+4e$, откъдето $S=3e$.

Първо ще докажем равенството

$$2(a^2+c^2+g^2+i^2)=b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2.$$

За целта ще го запишем във вида

$$\begin{aligned} & (a+c)^2+(c+i)^2+(a+g)^2+(g+i)^2-2(ac+ci+ag+gi)= \\ = \; & (h+e)^2+(d+e)^2+(f+e)^2+(b+e)^2-2e(b+d+f+h). \end{aligned}$$

Сборовете от квадратите от двете страни на равенството са равни, тъй като $a+c=S-b=h+e$ и т.н. Освен това,

$$ac+ci+ag+gi=(a+i)(c+g)=(S-e)^2=2e(S-e)=e(b+d+f+h).$$

Да забележим, че равенството от б) остава вярно при прибавяне на едно и също число към всички числа от таблицата. Наистина,

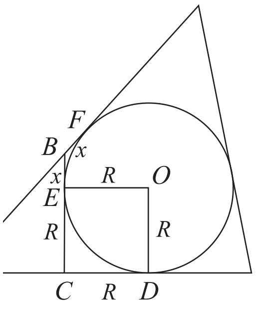
$$\begin{aligned} & 2((a+t)^3+(c+t)^3+(g+t)^3+(i+t)^3)= \\ = \; & 2(a^3+c^3+g^3+i^3)+6t(a^2+c^2+g^2+i^2)+6t^2(a+c+g+i)+8t^3= \\ = \; & b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3+3t(b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2)+ \\ & +3t^2(b+d+f+h+4e)+8t^3= \\ = \; & (b+t)^3+(d+t)^3+(f+t)^3+(h+t)^3+4(e+t)^3. \end{aligned}$$

Следователно е достатъчно да докажем твърдението за $e=0$. В този случай

$$a+i=c+g=a+c=g+i=b+h=d+f=2e=0$$

и двете страни на равенството са равни на 0.

Задача 4. В остроъгълен триъгълник е вписана окръжност с радиус R. Три допирателни към окръжността разделят триъгълника на три правоъгълни триъгълника и шестоъгълник. Периметърът на шестоъгълника е равен на Q. Да се намери сбора на диаметрите на вписаните в трите правоъгълни триъгълника окръжности.



Решение: Допирните точки на вписаната окръжност и върховете разделят периметъра на шестоъгълника на 12 отсечки. Отсечките през върховете на правите ъгли на шестоъгълника са равни на R (например, като прекараме радиусите OD и OE в допирните точки, ще получим квадрат $CDOE$, откъдето $CD = CE = R$).
Ако означим допирателните от останалите три върха с x, y, z, периметърът на шестоъгълника е равен на

$$Q = 6R + 2x + 2y + 2z.$$

Диаметърът на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност е равен на сбора на катетите минус хипотенузата. За $\triangle ABC$ диаметърът на вписаната окръжност е

$$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x,$$

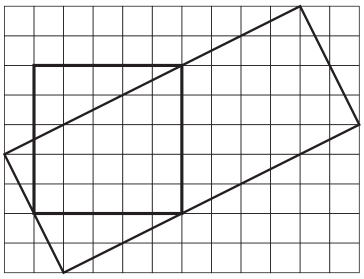
тъй като допирателните AD и AF са равни. Аналогично, другите два диаметъра са равни на $2y$ и $2z$, откъдето намираме, че сборът на трите диаметъра е равен на $2x + 2y + 2z = Q - 6R$.

Задача 5. Дадена е картина с размери 1×1. Правоъгълно парче хартия с лице 2 се нарича обвивка, ако картината може да се увие с хартията, без хартията да се реже. Ясно е, че правоъгълник 2×1 и квадрат със страна $\sqrt{2}$ са обвивки.

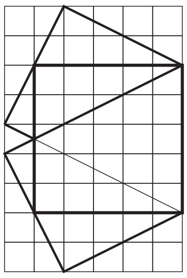
а) Докажете, че има и други обвивки.

б) Докажете, че има безбройно много обвивки.

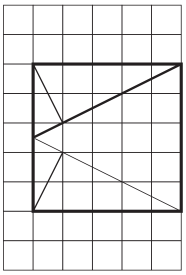
Решение: Ще докажем, че правоъгълник $\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ е обвивка. Да поставим този правоъгълник върху квадрата така, че два от върховете на квадрата да са върху страните, равни на $\sqrt{5}$, а един връх да съвпада със средата на третата страна (фиг. 1). Процесът на опаковането е показан на фиг. 2 и фиг. 3.



Фиг. 1

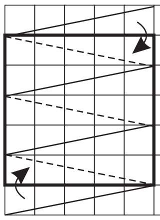


Фиг. 2

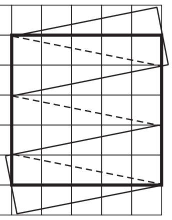


Фиг. 3

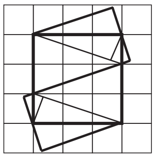
б) Да разделим вертикалните страни на квадрата на n части. На фиг. 4 е показано опаковането на квадрат с успоредник, по-малката страна на който е равна на $\frac{2}{n}$ (при $n = 5$), а на фиг. 5 – превръщането на успоредника в правоъгълник. На фиг. 6 е показано (за $n = 3$) самото прегъване.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Забележка. При $n = 1$ се получава опаковане с квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, при $n = 2$ – с правоъгълник $\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$ (фиг. 3), при $n = 3$ - правоъгълник $\sqrt{10} \times \frac{2}{\sqrt{10}}$ (фиг. 6).

Задача 6. Нека $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, където $\frac{a_n}{b_n}$ е несъкратима дроб. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $b_{n+1} < b_n$.

Решение: Нека $n = p(p-1) - 1$, където p е нечетно просто число. Да забележим, че b_{n+1} не се дели на p. Наистина, в разглеждания сбор само знаменателите на дробите $\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \ldots, \frac{1}{(p-1)p}$ се делят на p, но те могат да се групират по двойки така, че знаменателят на сбора да не се дели на p:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1}, \qquad \frac{1}{2p} + \frac{1}{p(p-2)} = \frac{1}{2(p-2)} \ldots$$

Освен това,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

Да допуснем, че числителят и знаменателят на последната дроб се делят на d, т.е.

$$\begin{aligned} a_{n+1}(p-1)p &\equiv b_{n+1} \pmod{d} \\ b_{n+1}(p-1)p &\equiv 0 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Тогава

$$a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Числата d и p са взаимно прости (иначе b_{n+1} ще е кратно на p). Числата d и a_{n+1} също са взаимно прости (иначе b_{n+1} ще се дели на техен общ делител, т.е. a_{n+1} и b_{n+1} няма да са взаимно прости). Следователно $(p-1)^2$ се дели на d и $d \leq (p-1)^2$. Оттук

$$b_n \geq \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}$$

и твърдението на задачата следва от съществуването на безбройно много прости числа.

Задача 7. Фокусник има тесте от 52 карти за игра. Зрителите искат да научат реда на картите в тестето (без значение отгоре надолу или обратно). Те могат да питат колко карти има между две определени карти (например между асо пика и девятка спатия). Един от зрителите знае реда на картите. Какъв е минималният брой въпроси, които той трябва да зададе на фокусника, за да могат останалите зрители да разберат реда на картите?

Решение: Ще докажем, че въпросите са най-малко 34.

Първият зрител задава въпрос за двете крайни карти. Отговорът на фокусника е 50 и показва на всички, че тези карти са крайни. Да наречем едната първа, а другата – 52-ра. Трябва да определим номерата на всички останали карти. Да наречем втората карта *дупка* и с втори въпрос да попитаме за двете съседни на дупката карти, т.е. за първа и трета карти. Отговорът е 1 и определя еднозначно положението на третата карта. След това продължаваме да задаваме въпроси по двойки:

- при нечетните въпроси питаме за двете крайни карти, които още не са споменавани (едната от тях е дупка, а другата - не);

- определяме нова дупка, която е неспоменатата карта в съседство с не-дупката;
- при следващия (четен) въпрос питаме за двете съседни на дупката карти.

Забелязваме, че дупката се появява първо по-близо до началото, след това по-близо към края и т.н. В първата двойка въпроси се казват карти 1, 52 и 3, във втората двойка - карти 2, 51 и 49, в третата двойка - карти 4, 50 и 6 и т.н. След отговорите на поредната двойка въпроси има два възможни варианта за разположението на трите назовани карти: основен (този, който е в действителност) и страничен (при който крайните карти си сменят местата и средната се премества по съответен начин). Например, след отговорите на въпроси 3 и 4 е ясно, че втората тройка е 2, 51 и 49 или 2, 51 и 4.

Основен вариант	$a\,b\,a$	$\dots$	$b \smile b\,a$
Страничен вариант	$a\,b\,a\,b$	$\dots$	$b\,a$

(Картите от една тройка са еднакво означени.)

Тази неопределеност ще изчезне след отговора на следващия (пети) въпрос (за карти 4 и 50). Това е така, защото в страничния вариант броят на картите между по-рано не споменатите крайни карти е най-много 44 и е по-малък от броя им в основния (който е 45). Следователно, като зададем 33 въпроса, ще уточним мястото на 48 карти. Последният, 34-и въпрос, ще зададем за 25-а и 26-а карта:

$$abacdcefeghgijiklkmnmoPoQQ \smile PQPnonlmljkjhihfgfdedbcba$$

(Предпоследната и последната тройка са означени съответно с P и Q.)

От този въпрос еднозначно се определя положението на последната тройка и единствената останала карта.

За да докажем, че по-малко въпроси не са достатъчни, ще разбием всички карти на 52 групи по една карта. При въпрос за две карти от различни групи, обединяваме двете групи в една. Ясно е, че всеки въпрос намалява броят на групите най-много с 1. Ако са зададени не повече от 33 въпроса, ще останат не по-малко от $52-33 = 19$ групи. Групите с 3 карти са не повече от 17 (тъй като $18.3 = 54 > 52$). Следователно или ще се намерят две групи с по една карта, или група с точно две карти. И в двата случая, като сменим местата на тези две карти, отговорите няма да се променят; това означава, че последователността на картите не може да се възстанови.

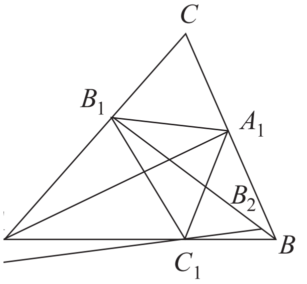
Есенен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Виж задача 2. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 2. Върху страните BC, AC и AB на остроъгълен $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1, B_1 и C_1 така, че A_1A, B_1B и $_1C$ са ъглополовящи в $\triangle A_1B_1C_1$. Докажете, че AA_1, BB_1 и $_1$ са височини в $\triangle ABC$.

Решение: Да прекараме ъглополовящите на външните ъгли на $\triangle A_1B_1C_1$. Нека ъглополовящите на външните ъгли при B_1 и C_1 се пресичат в точка A_2; аналогично определяме точките B_2 и C_2. Точката A_2 лежи и на ъглополовящта на $\measuredangle A_1$ (тъй като A_2 е равноотдалечена от правите A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1), т.е на правата A_1A. Следователно в $\triangle A_2B_2C_2$ правите AA_1, BB_1 и $_1$ са височини.

Ще докажем, че $\triangle A_2B_2C_2$ съвпада с $\triangle ABC$. Да допуснем, че това не е така и нека точка A_2 се намира извън $\triangle ABC$. Тогава лъчът A_2B_2 пресича страната AB на $\triangle ABB_1$ (в точка C_1) и не пресича отсечката AB_1 (разделя ги правата A_2A_1). Следователно този лъч пресича страната BB_1 на $\triangle ABB_1$, т.е. точка B_2 е вътрешна за отсечката BB_1, и следователно е вътрешна за $\triangle ABC$. Аналогично, точка C_2 се намира във вътрешността на $\triangle ABC$. Но отсечката B_2C_2 пресича страната BC в точка A_1. Противоречие.



По същия начин се получава противоречие и когато точка A_2 е в $\triangle ABC$.

Задача 3. Числото $a = 0,12457...$ е такова, че неговата n-та цифра след десетичната запетая е равна на последната цифра преди десетичната запетая на числото $n\sqrt{2}$. Докажете, че числото a е ирационално.

Решение: Да допуснем, че a е рационално число. Тогава то се представя като периодична десетична дроб с период m. Следователно цифрите след дестеичната запетая на a, записани в позиции $m, 10m, 100m, \dots, 10^km, \dots$, съвпадат от някакъв момент нататък. В същото време това са последователни цифри в десетичното представяне на ирационалното число $m\sqrt{2}$, което е непериодична дроб. Противоречие.

Задача 4. Може ли всяка призма да се разреже на пирамиди, така че основата на всяка пирамида да е в основата на призмата, а върхът на пирамидата да е върху другата основа на призмата?

Решение: Не може. Да разгледаме централно сечение на призмата. Всяка възможна пирамида пресича това сечение по многоъгълник, чието лице е 4 пъти по-малко от лицето на нейната основа. Сборът от лицата на основите на тези пирамиди трябва да е равен на лицето на двете основи на призмата. Но тогава сборът от лицата на сеченията с централното сечение е равен на половината от лицето на основата на призмата, т.е дори централното сечение не е запълнено.

Задача 5. Виж задача 6. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 6. Казваме, че колода от 52 карти е в правилен ред, ако всеки две съседни карти са или от еднакъв цвят, или с еднаква стойност, като това е вярно и за първата и последната карти. Най-горната карта е асо пика. Докажете, че броят на начините, по които могат да се подредят картите в правилен ред: а) се дели на 12!; б) се дели на 13!.

Решение: Да разгледаме таблица 4×13, чийто редове са означени отгоре надолу със спатия, каро, купа, пика, а стълбовете са означени отдясно наляво с асо, 2,3,4..., 10, вале, дама, поп. По този начин на всяка карта съответства поле на таблицата. На произволна колода от карти съпоставяме таблица, във всяка клетка на която сме записали поредния номер на съответната карта. Таблица, съответстваща на правилно разположение на картите, има следните свойства:

1. В долния ляв ъгъл е записано числото 1 (тъй като асо пика е първата карта в колодата).

2. Всеки две последователни числа (52 и 1 също се разглеждат като последователни) са в един ред или един стълб.

Да наречем такава таблица правилна.

а) Да разгледаме правилна таблица и да приложим произволна пермутация на стълбовете без първия (има 12! такива пермутации). Тъй като числото 1 остава в долния ляв ъгъл и всеки две последователни числа остават в един ред или един стълб, отново получаваме правилна таблица. По този начин всички правилни таблици се разбиват на непресичащи се класове, всеки от който има 12! елемента. Следователно броят на всички правилни таблици се дели на 12!.

б) Достатъчно е да докажем, че броят на правилните таблици се дели на 13. Да образуваме цилиндър като залепим двете крайни вертикални страни на една правилна таблица. Обхождането на този цилиндър може да започне от всяко поле от първия ред, като следваме последователността на първоначалното обхождане (от 52 отиваме в 1). Получаваме 13 обхождания. Да допуснем, че обхожданията, започнали от полета a и b, съвпадат. Тогава същото обхождане се получава и от клетка $b + (b - a)$ (по модул 13). Тъй като 13 е просто число, ще получим, че всички обхождания съвпадат. Това означава, че от реда, в който за първи път се появяват две последователни числа, не може да се излезе, което е противоречие. Следователно получените 13 обхождания са различни, т.е. броят на правилните таблици се дели на 13.

Задача 7. Положителните числа $x_1, \ldots, x_k$ са такива, че

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \qquad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажете, че $k > 50$.

б) За някоя стойност на k дайте пример на такива числа.

Решение: а) По условие

$$4(x_1^2 + \cdots + x_k^2) < 2(x_1 + \cdots + x_k) < x_1^3 + \cdots + x_k^3.$$

Следователно поне за едно число, например за x_1, е изпълнено неравенството $4x_1^2 < x_1^3$, т.е. $x_1 > 4$, откъдето

$$(2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2.4^2 = -28.$$

Минимумът на функцията $2x^2 - x$ е равен на $-\frac{1}{8}$, оттук

$$-\frac{1}{8}(k-1) \leq (2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < -28$$

и получаваме $k - 1 > 8.28 > 50$.

б) Да изберем $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2501} = 0,1$. Тогава

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + \cdots + x_{2501}^2 & = & 100 + 25 = 125 \\ x_1 + \cdots + x_{2501} & = & 10 + 250 = 260 \\ x_1^3 + \cdots + x_{2501}^3 & > & 1000 \end{array}$$

и всички неравенства са изпълнени.

Есенен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Две цели положителни числа x и y са записана дъската в ненамаляващ ред, т.е. $x \leq y$. Мария записва в тетрадката си x^2 и след това заменя числата на дъската с x и $y-x$, записани отново в ненамаляващ ред. Тя повтаря същата операция с новите числа и т.н. докато едното от двете числа на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът от числата в тетрадката на Мария?

Решение: Да разгледаме правоъгълник със страни x и y. На първата стъпка да отрязваме от правоъгълника квадрат със страна x и записваме лицето му, на втората извършваме същата оерация с новия правоъгълник и т.н. Накрая правоъгълникът ще бъде разрязан на квадрати, чийто лица са записани. Сборът на тези числа е равен на лицето на дадения правоъгълник, т.е. на xy.

Задача 2. Лъжцте винаги лъжат, честните хора винаги казват истината, а хитреците понякога казват истината, а понякога лъжат. Можете да задавате въпрос, чийто отговор е "да"или "не"(например: "този човек хитрец ли е?").

а) Пред вас са един лъжец, един честен човек и един хитрец. Всеки от тях знае какви са останалите. Как може да се определи кой какъв е?

б) Пред вас са един лъжец, един честен човер и двама хитреци. Всеки от тях знае какви са останалите. Докажете, че хитреците могат да се уговорят да отговарят по такъв начин, че да не може да се определи какъв е всеки от четиримата.

Решение: а) Питаме всеки от тримата "Вярно ли е, че и двамата ти съседи са лъжци?". Между трите отговора ще има "Да"на лъжеца и "Не"на честния. Тъй като отговорите са три, то "Да"или "Не"ще се появи точно един път. По този отговор ще познаем един от тримата – честния или лъжеца. Като му зададем въпрос за един от другите двама ”Вярно ли е, че той е хитрец?”, ще разберем окончателно кой какъв е.

б) Да означим участниците: лъжеца с Л, честния човек с Ч и хитреците с ХЛ и ХЧ. Ако хитреците се уговорят да отговарят така, все едно ХЛ е лъжец, ХЧ е честен човек, Л е хитрец, който се представя за лъжец, а Ч е хитрец, който се представя за честен човек, тогава Л и ХЛ стават неразличими, също и Ч и ХЧ.

Задача 3. а) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1. Докажете, че някои от числата могат да се изтрият така, че произведението на останалите числа да се записва като разлика на квадратите на две естествени числа.

б) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1, едно от които е 2006. Докажете, че ако има само едно число, за което произведението на останалите числа се записва като разлика на квадратите на две естествени числа, то това число е 2006.

Решение: *Лема.* Естествено число се представя като разлика на квадрати на две естествени числа или когато е нечетно, по-голямо от 1, или когато се дели на 4 и е по-голямо от 4.

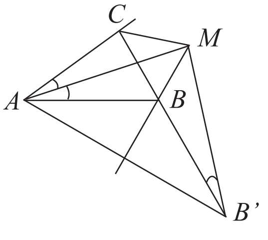
Наистина, ако числото n се представя като разлика на квадрати на естествени числа, т.е. $n = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, то е произведение на два различни множителя с еднаква четност (сборът им е четно число). Ако са нечетни, то и n е нечетно и е по-голямо от 1. Ако са четни, то n се дели на 4 и е по-голямо от $2.2 = 4$.

От друга страна, нечетното число $n = 2k + 1,\ k \geq 1$, се представя като разлика на квадрати по следния начин: $n = (k + 1)^2 - k^2$, а за кратното на 4 число $n = 4k,\ k > 1$ представянето е $n = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$.

а) Твърдението следва от лемата, тъй като винаги може да се зачеркне едно число така, че или да не останат четни числа (произведението ще е нечетно, по-голямо от 1), или да останат поне две четни числа (произведението ще се дели на 4 и ще е по-голямо от 4).

б) Числото 2006 е четно. Ако има друго четно число n, то може да се зачеркне произволно число освен n и 2006, което противоречи на условието. Следователно няма други четни числа. Тогава можем да зачеркнем 2006 (произведението на останалите числа е нечетно и е по-голямо от 1) и не може да се зачеркне друго число (2006 е четно, но не се дели на 4).

Задача 4. На продължението на страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка B' (B е между B' и C) така, че $BB' = AB$. Външните ъглополовящи при ъглите B и C се пресичат в точка M. Докажете, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.

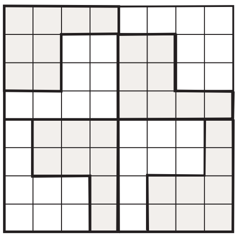


Решение: Точката M е равноотдалечена от правите AC и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle C$), и от правите AB и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle B$). Следователно M е равноотдалечена от рамената на $\sphericalangle BAC$, значи AM е ъглополовяща на този ъгъл, откъдето получаваме $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Тъй като $\triangle ABB'$ е равнобедрен, то MB е симетрала на AB', откъдето получаваме, че $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BB'M$. Тогава $\sphericalangle CB'M = \sphericalangle BB'M = \sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Отсечката CM се вижда от точките A и B' под равни ъгли, което означава, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.

Задача 5. Квадрат е разрязан на n еднакви не изпъкнали многоъгълника така, че всички страни на тези многоъгълници са успоредни на страните на квадрата и никой многоъгълник не се получава от друг чрез транслация. Каква е най-голямата възможна стойност на n?

Решение: Ще докажем, че търсената стойност е 8. Пример за разрязване на 8 многоъгълника е даден на чертежа.

От друга страна, многоъгълникът може да се постави по не повече от 8 начина (с точност до успоредно пренасяне). Наистина, да разгледаме три негови последователни върха A, B и C (по тяхното разположение положението на многоъгълника се определя еднозначно).



Можем да считаме, че точката B е фиксирана. От нея страната BA може да се прекара по 4 начина (в четирите посоки, успоредно на страните на квадрата) и след това - страната BC по два начина.

Есенен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. На дъската са записани три цели положителни числа x, y и z. Мария си записва в тетрадка произведението на някои две от числата и намалява третото число на дъската с 1. С новите три числа тя извършва същата операция и т.н., докато едно от числата на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът на числата в тетрадката на Мария?

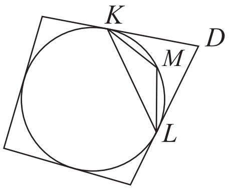
Решение: Произведението на числата на дъската при всеки ход се намалява със записаното в тетрадката число. Когато едно от числата стане равно на 0, произведението на числата на дъската също става 0. Следователно сборът на числата в тетрадката е xyz.

Задача 2. В четириъгълник е вписана окръжност. Допирните точки на окръжността със страните на четириъгълника са свързани последователно с отсечки. Така са получени четири триъгълника, всеки от които има върхове в две допирни точки и един връх на четириъгълника. Докажете, че диагоналите на четириъгълника с върхове центровете на вписаните в четирите триъгълника окръжности, са перпендикулярни.

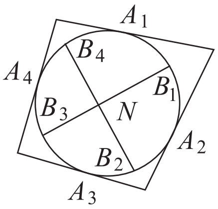
Решение: Първо ще докажем, че центърът на вписаната окръжност на всеки от разглежданите триъгълници е среда на вътрешната за триъгълника дъга от вписаната в дадения четириъгълник окръжност. Нека D е общият връх на страните на четириъгълника, допиращи се до вписаната окръжност в точки K и L (фиг. 1). Нека M е средата на дъгата KL, лежаща в $\triangle DKL$. От равенството

$$\sphericalangle MKL = \frac{\overset{\frown}{ML}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} = \sphericalangle MKD$$

следва, че KM е ъглополовяща на $\sphericalangle DKL$. Аналогично ML е ъглополовяща на $\sphericalangle KLD$. Следователно M е център на вписаната в $\triangle KLD$ окръжност.



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека допирните точки на четириъгълника с вписаната окръжност са A_1, A_2, A_3, A_4, а средите на дъгите $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_1}$ са B_1, B_2, B_3, B_4 (фиг. 2). Трябва да докажем, че $B_1B_3 \perp B_2B_4$. Ако тези отсечки се пресичат в т. N, намираме

$$\sphericalangle B_1NB_2 = \frac{\overset{\frown}{B_1B_2}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_3B_4}}{2} = \frac{1}{4}(\overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4A_1}) = 90^\circ.$$

Задача 3. В полетата на таблица 2006×2006 по произволен начин са записани числата $1, 2, 3, \ldots, 2006^2$. Да се докаже, че съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4.

Решение: Измежду записаните числа всеки остатък при деление на 4 $(0, 1, 2, 3)$ се среща по 1003^2 пъти. Да допуснем, че няма съседни числа с картен на 4 сбор и да разделим таблицата на 1003^2 квадрата със страна 2. Всеки две полета в такъв квадрат са съседни, следователно в един квадрат има най-много едно число, което дава остатък 0 (също остатък 2) при деление на 4. Тъй като числата, даващи остатък 0 (остатък 2) са точно 1003^2, то във всеки квадрат има едно число, даващо остатък 0 (остатък 2) при деление на 4. В останалите две полета не може да има числа, даващи различни остатъци (1 и 3) при деление на 4. Следователно броят на числата, даващи остатък 1 (остатък 3) е четен. Противоречие.

Следователно съществуват числа с желаното свойство.

Задача 4. Дадена е безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots$ и безкрайна геометрична прогресия $b_1, b_2, \ldots$. Всички членове на геометричната прогресия са членове и на аритметичната прогресия. Докажете, че частното на геометричната прогресия е цяло число.

Решение: Ако частното на геометричната прогресия q е 1, задачата е решена. Иначе разглеждаме частното

$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{b_2 - b_1} = q^n.$$

Тъй като членовете на геометричната прогресия са членове и на аритметичната, това частно е рационално число. Оттук q е рационално. От друга страна, ако d е разликата на аритметичната прогресия, то числото

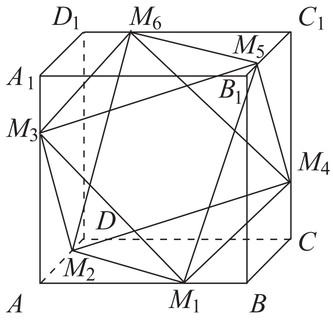
$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{d} = \frac{(b_2 - b_1)q^n}{d}$$

е цяло за всяко n, следователно q е също цяло число.

Задача 5. Може ли правилният октаедър да бъде вписан в куб така, че всички върхове на октаедъра да са върху рубовете на куба? (Правилният октаедър има 6 върха, от всеки връх излизат по 4 ребра и всички стени са равностранни триъгълници.)

Решение: Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е куб с ребро 1. На ребрата AB, AD, AA_1, CC_1, B_1C_1, C_1D_1 вземаме точки $M_1, M_2, \ldots, M_6$ съответно, така, че $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = \frac{3}{4}$. Тогава

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = M_4M_5 = M_5M_6 = M_6M_1 =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$M_1M_4 = M_1M_5 = M_2M_4 = M_2M_6 = M_3M_5 = M_3M_6 =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$



Оттук триъгълниците

$$M_1M_2M_3, \quad M_4M_5M_6, \quad M_1M_4M_5, \quad M_2M_4M_6,$$
$$M_3M_5M_6, \quad M_4M_1M_2, \quad M_5M_1M_3, \quad M_6M_2M_3$$

са равностранни и точките $M_1, M_2, \ldots, M_6$ са върхове на октаедър.

Пролетен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Дадено е естествено число N. За да определи най-близкото до $\sqrt{N}$ цяло число, Петър намира най-близкия до N квадрат на естествено число a^2 и приема, че a е търсеното число. Винаги ли е верен отговорът на Петър?

Решение: Ще докажем, че отговорът на Петър винаги е верен.

Нека $\sqrt{N} = k$ и $m^2 \leq N < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Тогава a се определя по правилото:

$$a = \begin{cases} m, & N \leq m^2 + m; \\ m+1, & N > m^2 + m. \end{cases}$$

В първия случай имаме

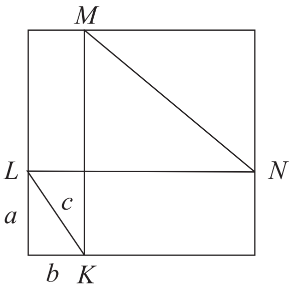
$$N < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}, \text{ т.е. } k < m + \frac{1}{2},$$

а във втория случай

$$N \geq m^2 + m + 1 > \left(m + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ т.е. } k > m + \frac{1}{2}.$$

И в двата случая a е най-близкото до k естествено число.

Задача 2. На страните на квадрат със страна 1 са означени точките K, L, M и N така, че отсечката KM е успоредна на две от страните на квадрата, а отсечката LN е успоредна на другите две страни. Отсечката KL отрязва от квадрата триъгълник с обиколка 1. На колко е равно лицето на триъгълника, който отрязва от квадрата отсечката MN?



Решение: Ще докажем, че търсеното лице е равно на $\frac{1}{4}$. Нека катетите на триъгълника, отрязан от отсечката KL, са равни на a и b, а хипотенузата е равна на c (виж чертежа). По условие $c = 1 - a - b$. Като вдигнем на това равенство на квадрат и приложим Питагоровата теорема, получаваме

$$\begin{aligned} c^2 &= (1-a-b)^2 \\ a^2 + b^2 &= 1 + a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b \\ -1 &= 2ab - 2a - 2b. \end{aligned}$$

Тогава лицето на триъгълника, който отсечката MN отрязва от квадрата, е равно на

$$S = \frac{1}{2}(1-a)(1-b) = \frac{1}{2}(1+ab-a-b) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задача 3. Катя избрала двадесет последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото M. Лили избрала двадесет и едно последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото N. Възможно ли е Катя и Лили да получат равни числа, т.е. $M = N$?

Решение: Равенството $M = N$ е възможно – например, ако Лили е избрала числата $2, 3, 4, \ldots, 22$ и ги е записала в този ред, а Катя е избрала числата $23, 4, 5, \ldots, 22$ (в записания ред).

Задача 4. В изпъкнал n-ъгълник са построени някои диагонали (които могат и да се пресичат) така, че никои три диагонала не се пресичат във вътрешна точка на многоъгълника. По този начин многоъгълникът е разбит на триъгълници. Колко най-много могат да са триъгълниците?

Решение: Ще докажем, че триъгълниците са най-много $2n-4$ при четно $n = 2k$ и $2n-5$ при нечетно $n = 2k+1$.

Пример. Построяваме непресичащи се диагонали, които разбиват n-ъгълника на $k-1$ четириъгълника (при нечетно n остава един триъгълник) и във всеки от тези четириъгълници построяваме двата диагонала (те го разбиват на четири триъгълника). При четно n получаваме $4(k-1) = 2n-4$ търгълника, а при нечетно n триъгълниците са $4(k-1)+1 = 2n-5$.

Оценка. Първо ще отбележим, че няма диагонал, който пресича два други диагонала във вътрешни точки.

Да допуснем, че такъв диагонал съществува и да разгледаме отсечката върху него, която свързва две съседни пресечни точки. При пресичането на тази отсечка с двата диагонала се получават ъгли със сбор 360°. Следователно от едната страна на отсечката сборът на ъглите е не по-малък от 180°, т.е. не може да има триъгълник. Противоречие.

Следователно диагоналите могат да се разделят на пресичащи се двойки. Четирите края на дагоналите във всяка такава двойка също са свързани с дагонали или страни на многоъгълника (за да се получи разбиване на триъгълници). Това означава, че ако премахнем всички двойки пресичащи се диагонали, ще получим разбиване на многоъгълника на k четириъгълника и m триъгълника. Всички техни върхове са върхове на дадения многоъгълник, затова сборът от ъглите им е равен на сбора на ъглите на многоъгълника, т.е.

$$k.360^\circ + m.180^\circ = (n-2).180^\circ,$$

т.е. $2k + m = n - 2$. Броят на триъгълниците в първоначалното разбване е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 4.$$

Ако n е нечетно, от равенството $2k + m = n - 2$ следва, че m е нечетно, т.е. $m \geq 1$. В този случай оценката е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 5.$$

Задача 5. Намерете всички растящи аритметични прогресии с членове прости числа със свойството: броят на членовете на прогресията е краен и по-голям от разликата на прогресията.

Решение: Ще докажем, че търсените прогресии са 2, 3 и 3, 5, 7.

Да разгледаме прогресия с разлика 1, удовлетворяваща условието на задачата. Тя има поне два члена. Единият от тях е задължително четен, а единственото просто четно число е 2. По-малки от 2 прости числа няма, следователно 2 е първият член на прогресията. Вторият е 3, а третият член (4) не е просто число.

Да разгледаме прогресия с разлика 2, която удовлетворява условието. Тя съдържа поне 3 члена; нека първите три са $k - 2, k, k + 2$. Ясно е, че какъвто и остатък да дава k при деление на 3, един от тези членове се дели на 3. Простото число, което се дели на 3, е 3. Лесно се вижда, че 3 може да е само първи член на прогресията; получаваме 3, 5, 7. Четвъртият член е 9, съставно число.

Да разгледаме прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разлика $d \geq 3$. Числата $d-1$ и d са взаимно прости, следователно всички прости делители на $d-1$ не делят d. Нека p е един от тези прости делители. Разглеждаме частта от прогресията $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$. (Това е част от прогресията, тъй като $p < d < n$.) Всички остатъци по модул p на числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ са различни. (Наистина, ако

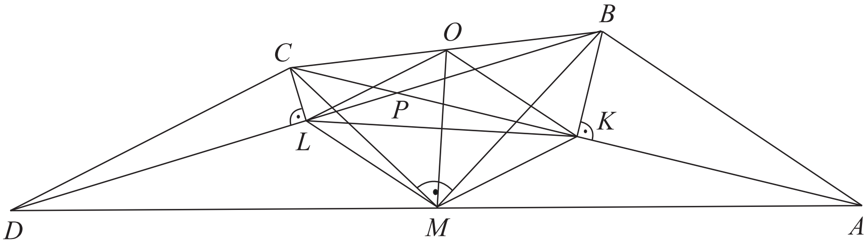
$$\left.\begin{array}{l} a_i = a_1 + (i-1)d = sp + r \\ a_j = a_1 + (j-1)d = tp + r \end{array}\right\} \Longrightarrow (t-s)p = (j-i)d.$$

Тъй като $j - i < p$, дясната част на последното равенство не се дели на p, а лявата се дели. Противоречие.) Следователно един от разглежданите остатъци е 0. Това означава, че едно от числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ се дели на

p. Това обаче е невъзможно, тъй като всяко от тези числа е просто и по-голямо от p (тъй като има номер най-малко 2 и следователно е по-голямо от d).

Задача 6. В четириъгълника $ABCD$ страните AB, BC и CD са равни, а точка M е среда на AD. Известно е, че $\sphericalangle BMC = 90°$. Намерете ъгъла между диагоналите на четириъгълника $ABCD$.

Решение: Нека O, K, L са среди съответно на BC, AC, BD, а P е пресечна точка на AC и BD. Точките K и L са различни (иначе $ABCD$ е ромб и $\sphericalangle BMC < \sphericalangle BPC = 90°$).



Триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ са равнобедрени, следователно медианата към основата във всеки от тях е и височина, т.е. $BK \perp AC$ и $CL \perp BD$. От равенството

$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BLC = 90°$$

следва, че точките K, M, L лежат на окръжност с диаметър BC и център точка O. Тъй като хордата KM е средна отсечка в $\triangle ACD$, получаваме, че $KM = \frac{1}{2}CD = OC$, т.е. тази хорда е равна на радиуса. Тогава $\triangle KOM$ е равностранен и $\sphericalangle MOK = 60°$.

Аналогично $\sphericalangle MOL = 60°$, т.е. $\sphericalangle KOL = 120°$. Вписаният ъгъл $\sphericalangle KBL$ се измерва с дъгата $\overset{\frown}{KL}$ (или с допълващата я, когато даденият четириъгълник не е изпъкнал),следователно е равен на $60°$ (или $120°$). Това означава, че $\sphericalangle PBK = 60°$, т.е. $\sphericalangle BPK = 30°$.

Задача 7. В своята каюта капитан Врунгел подредил в кръг разбъркана колода от 52 карти, като оставил едно свободно място. От палубата матрос Фукс, без да знае разположението на картите, назовава произволна карта. Ако тази карта е до свободното място, Врунгел я премества там, без да каже на Фукс. Иначе не прави нищо. После Фукс назовава друга карта и така колкото пъти иска, докато каже ’стоп’.

а) Може ли Фукс да играе така, че накрая всяка карта да се намира различно от първоначалното си място?

б) Може ли Фукс да играе така, че накрая асо пика да не е до свободното място?

Решение: а) Фукс може да играе така: 52 пъти назовава в един и същи ред всички карти (така назовава общо 52^2 карти) и след това казва 'стоп'. При такава игра картите се преместват в една и съща посока: ако първо е преместена карта a, то до следващото назоваване на a ще се споменат всички карти, включително и тази, която стои от другата страна на свободното място срещу a; тя се мести в същата посока и т.н. При всяко изреждане на колодата се премества поне една карта, значи общо преместванията са поне 52 и всяка карта си сменя мястото. От друга страна, всяка карта се е преместила най-много 52 пъти и следователно не може да се завърти и да се върне на мястото си (за което са необходими 53 хода).

б) Ще докажем, че за всяка последователност от назовани карти съществува начална позиция, която премнава в позиция с асо пика до свободното място. Нека избраната последователност е M.

Ясно е, че назовавайки повторно дадена карта, ние връщаме назад предишния ход. По същия начин, назовавайки последователност от карти в обратен ред, връщаме крайната позиция до началната.

Тогава, ако изберем за начална коя да е позиция с асо пика до свободното място и приложим обратната на M последователност от карти, ще получим начална позиция, която не е печеливша за M.

Пролетен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

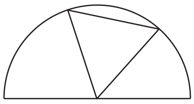
Задача 1. На параболата $y = x^2$ са избрани четири точки A, B, C, D така, че отсечките AB и CD се пресичат на ординатната ос. Намерете абсцисата на точка D, ако абсцисите на точките A, B и C са равни съответно на a, b и c.

Решение: Нека уравнението на правата AB е $y = kx + l$, а на правата CD е $y = mx + l$ (свободните членове са равни, тъй като двете прави пресичат ординатната ос в една и съща точка). Тогава a и b са корените на уравнението $x^2 = kx + l$ и от формулите на Виет $ab = -l$. Аналогично $cd = -l$, където d е абсцисата на точката D. Оттук $d = \dfrac{ab}{c}$.

Задача 2. Изпъкнала фигура F притежава свойството: всеки равностранен триъгълник със страна 1 може да се транслира така, че всичките му върхове да лежат на контура на F. Следва ли от това, че F е кръг?

Решение: Ще докажем, че фигура с даденото свойство не е задължително кръг, като разгледаме полукръг с радиус 1.

Достатъчно е да покажем, че равностранен триъгълник със страна 1 може да се завърти на 120°, като върховете му остават на контура на полукръга. Това условие очевидно е изпълнено за триъгълник с връх в центъра на полукръга, който се върти около този център.



Задача 3. Нека $f(x)$ е многочлен, различен от константа. Възможно ли е уравнението $f(x) = a$ при всяка стойност на a да има четен брой решения?

Решение: Ако степента на f е нечетна, то при достатъчно голямо a уравнението $f(x) = a$ има точно едно решение.

Нека степента на f е четна. Без огранчение приемаме, че старшият коефициент е положителен (иначе умножаваме f с -1). Разделяме числовата ос на интервали, в които функцията f е монотонна. Ясно е, че f намалява в най-левия интервал и расте в най-десния; редуват се интервали на растене и намаляване. Следователно броят на интервалите е четен и оттук – броят на локалните екстремуми на функцията f е нечетен. Тогава съществува стойност a_0 (например най-големия локален екстремум), която се достига нечетен брой пъти .

Задача 4. Виж задача 7. от Основния вариант за 7. – 9. клас.

Задача 5. От правилен октаедър с ребро 1 са отрязани 6 ъгъла с форма на правилна четириъгълна пирамида с ребро 1/3. Така е получен многостен, чиито стени са квадрати и правилни шестоъгълници. Може ли пространството да се пакетира с многостени от този вид?

Решение: Ще докажем, че такова пакетиране е възможно.

Да оцветим тези точки в пространството, чиито координати са цели числа с една и съща четност. За всяка оцветена точка M определяме множеството точки, разстоянието от които до M е не по-голямо от разстоянието до всяка друга оцветена точка. По този начин цялото пространство се разбива на множества с общи граници. Тези множества се получават едно от друго чрез транслация и следователно са еднакви. Ще докажем, че те са подобни на дадения многостен.

Да разгледаме множеството M_O, съответстващо на точката $O(0, 0, 0)$. Свързваме O с 'най-близките' осем оцветени точки – $(\pm1, \pm1, \pm1)$. През средата на всяка построена отсечка построяваме перпендикулярна на съответната отсечка равнина (средите са $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$). Тези осем равнини 'отсичат' октаедър с върхове в точките $(\pm 3/2, 0, 0), (0, \pm 3/2, 0), (0, 0, \pm 3/2)$. Равнината $x = 1$, която отделя O от точката $(2, 0, 0)$, отсича от този октаедър по една трета от страните, излизащи от неговия връх $(3/2, 0, 0)$. Аналогично отрязват от октаедъра останалите равнини, отделящи O от оцветените точки $(-2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$.

Задача 6. Дадено е ирационално число α, за което $0 < \alpha < 1/2$. Числото α_1 се определя като по-малкото от числата 2α и $1 - 2\alpha$. По същия начин се определя и α_2 като по-малкото от числата $2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_1$, и т.н.

а) Докажете, че за някое n е изпълнено неравенството $\alpha_n < 3/16$.

б) Възможно ли е неравенството $\alpha_n > 7/40$ да е изпълнено за всяко естествено число n?

Решение: Дадената редица е дефинирана по следния начин:

$$\alpha_0 = \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n < \dfrac{1}{4}; \\ 1 - 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

От дефиницията следва лесно, че всички членове на редицата са в интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

а) Първо ще докажем, че съществува такова n, за което α_n е по-малко от $\frac{1}{3}$. Наистина, ако $\alpha_1 > \frac{1}{3}$, то $\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 < \frac{1}{3}$.

След това ще докажем, че съществува такова n, за което $\alpha_n < \frac{1}{4}$. Ако намереното на предишната стъпка α_k удовлетворява това условие, твърдението е доказано. Иначе имаме $\frac{1}{4} < \alpha_k < \frac{1}{3}$. Нека $\alpha_k = \frac{1}{3} - e$, където $e < \frac{1}{12}$. Ще разгледаме отклонението на всеки следващ член на редицата от $\frac{1}{3}$. Тъй като $\alpha_k > \frac{1}{4}$, то $\alpha_{k+1} = 1 - 2\alpha_k = \frac{1}{3} + 2e$. Очевидно $\alpha_{k+1} > \frac{1}{4}$, следователно $\alpha_{k+2} = 1 - 2\alpha_{k+1} = \frac{1}{3} - 4e$. При всеки следващ член отклонението от $\frac{1}{3}$ се удвоява. Ако $\alpha_{k+2} < \frac{1}{4}$, търсеното число е намерено; ако не – повтаряме процедурата и т.н., докато получим $\alpha_n < \frac{1}{4}$ (повтарянето е възможно, тъй като условието $\frac{1}{4} < \alpha_{k+2} < \frac{1}{3}$ е изпълнено).

Сега ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{1}{5}$. Ако намереното на предишната стъпка a_n не удовлетворява това условие, то $\frac{1}{5} < \alpha_n < \frac{1}{4}$ и $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n > \frac{2}{5} > \frac{1}{4}$, следователно $\alpha_{n+2} = 1 - 2\alpha_{n+1} = 1 - 4\alpha_n < \frac{1}{5}$.

Накрая ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{3}{16}$. Ако намереното на предишната стъпка a_k не удовлетворява това условие, то $\frac{3}{16} < \alpha_k < \frac{1}{5}$. Ще покажем, че при следващите членове на редицата отклонението от $\frac{1}{5}$ се увеличава. Нека $\alpha_k = \frac{1}{5} - e$, където $e < \frac{1}{80}$. Последователно намираме

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{k+1} & = & 2\alpha_k & = & \frac{2}{5} - 2e > \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+2} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} + 4e < \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+3} & = & 2\alpha_{k+2} & = & \frac{2}{5} + 8e > \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+4} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} - 16e
\end{array}$$

Ако $\alpha_{k+4} > \frac{3}{16}$, повтаряме процедурата, което е възможно, тъй като условието $a_{k+4} = \frac{1}{5} - e_1$ (където $e_1 < \frac{1}{80}$) е изпълнено.

б) Ще построим пример на редица, удовлетворяваща условието, като използваме представянето на числата във вид на безкрайни двоични дроби. Тези дроби се записват само с цифрите 0 и 1, като цифра 1 в k-ти разред след запетаята прибавя 2^{-k}. Както и при десетичните дроби, ирационалните числа се представят като безкрайни непериодични дроби.

Да разгледаме дробта $d = 0,0000001000000010...$, в която цифрите 1 са в 7-ми, 15-ти, 23-ти и т.н. разред след запетаята. Тя е равна на сбора на безкрайната геометрична прогресия $2^{-7} + 2^{-15} + 2^{-23} + \cdots = \frac{2^{-7}}{1 - 2^{-8}} = \frac{2}{255}$. Ако част от единиците (не крайна) непериодично се заменят с 0 и резултатът се умножи по 3, ще се получи ирационално число, по-малко от $\frac{6}{255} = \frac{2}{85}$. Такова число ще наречем *удобно.*

Нека $\alpha = \frac{1}{5} - b$, където b е удобно число. Тогава $\alpha > \frac{1}{5} - \frac{2}{85} > \frac{7}{40}$. Ще разгледаме два случая в зависимост от това дали при образуването на b

цифрата 1 в 7-ми разред е заменена с 0 или не.

Ако цифрата 1 е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - c * 2^{-8}$, където числото c е удобно. Последователно намираме

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{5} - c * 2^{-7}, & \alpha_2 &= \frac{1}{5} + c * 2^{-6}, \\ \alpha_3 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-5}, & \alpha_4 &= \frac{1}{5} - c * 2^{-4}, \\ &\dots & \alpha_8 &= \frac{1}{5} - c. \end{aligned}$$

Ако цифрата 1 не е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - 3*2^{-7} - c*2^{-8} = \frac{113}{640} - c*2^{-8}$, където c е удобно число. Тогава

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{113}{320} - c * 2^{-7}, & \alpha_2 &= \frac{47}{160} + c * 2^{-6}, \\ \alpha_3 &= \frac{33}{80} - c * 2^{-5}, & \alpha_4 &= \frac{7}{40} + c * 2^{-4}, \\ \alpha_5 &= \frac{7}{20} + c * 2^{-3}, & \alpha_6 &= \frac{3}{10} - c * 2^{-2}, \\ \alpha_7 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-1}, & \alpha_8 &= \frac{1}{5} - c. \end{aligned}$$

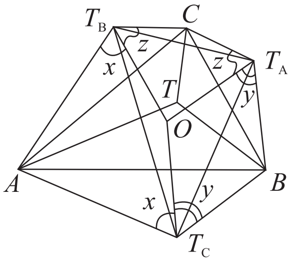
И в двата случая $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 > \frac{7}{40}$, а α_8 е число от вида на α. Следователно всички числа в редицата са по-големи от $\frac{7}{40}$.

Задача 7. Страните на триъгълник ABC се виждат от точка T под ъгъл 120°. Докажете, че правите, симетрични на AT, BT и CT относно BC, CA и AB съответно, се пресичат в една точка.

Решение: Нека T_A, T_B, T_C са точките, симетрични на T относно правите BC, CA, AB съответно. Тъй като AT е ъглополовяща на $\sphericalangle BTC = 120^\circ$, то нейният симетричен образ е L_A – ъглополовящата на $\sphericalangle BT_AC = 120^\circ$. Аналогични твърдения са верни и за другите два образа L_B и L_C.

Нека O е центърът на описаната около $\triangle T_AT_BT_C$ окръжност. Радиусите OT_A, OT_B, OT_C разделят ъглите $\sphericalangle T_A, \sphericalangle T_B, \sphericalangle T_C$ на шестоъгълника $BT_ACT_BAT_C$ на два ъгъла със сбор 120° (ако радиусът е външен за ъгъла, приемаме, че едната част е по-голяма от 120°, а другата по-малка от 0°). От друга страна, $AT_B = AT = AT_C$ и триъгълниците $\triangle AT_BO$ и $\triangle AT_CO$

са еднакви. Следователно $\sphericalangle AT_BO = \sphericalangle AT_CO = x$; аналогично получаваме $\sphericalangle BT_CO = \sphericalangle BT_AO = y$ и $\sphericalangle CT_AO = \sphericalangle CT_BO = z$.



Сега от системата $x+y = x+z = y+z = 120^\circ$ лесно следва $x = y = z = 60^\circ$. Това означава, че правите L_A, L_B, L_C се пресичат в точка O.

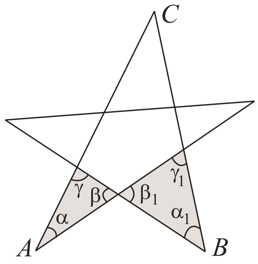
Пролетен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Митко нарисувал петолъчка, като начертал 5 отсечки без да вдига молива от листа. Той забелязал, че построенте отсечки разделят петолъчката на 5 еднакви триъгълника и петоъгълник. Следва ли от това, че петоъгълникът е правилен (т.е. с равни ъгли и равни страни)?

Решение: Ще докажем, че петоъгълникът е правилен.

Да означим с C един от върховете на петолъчката, а с A и B – другте краища на отсечките през C. При означението на ъглите, показано на чертежа, имаме равенството на връхните ъгли $\beta = \beta_1$ и $\alpha_1 \neq \gamma$ (тъй като правите AC и BC не са успоредни).

По условие оцветените триъгълници са еднакви, следователно $\alpha_1 = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma$. Ясно е, че с подобни разсъждения можем еднозначно да определим разпределението на ъглите при всеки от петте еднакви триъгълника. Така получаваме, че $\beta = \gamma$. Затова всички ъгли на петоъгълника са равни на $180^\circ - \gamma$, а всички страни са равни като съответни елементи в еднакви триъгълници.



Задача 2. На дъската са записани две 2007-цифрени числа. Известно е, че от двете числа могат да се изтрият по 7 цифри така, че получените числа да са равни. Докажете, че в дадените числа могат да се вмъкнат по 7 цифри така, че отново да се получат равни числа.

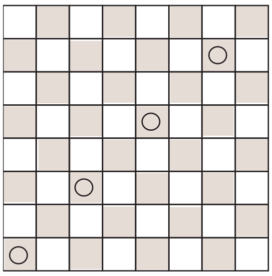
Решение: Нека 2007-цифрените числа са K и C, а полученото след изтриване 2000-цифрено число е M. Между цифрите на M слагаме звездички на всяко място, където е била изтрита цифра: червени звездички вместо цифрите на K и сини – вместо цифрте на C. При обратната смяна на всички звездички със съответните им цифри ще се получи 2014-цифрено число B.

Ще покажем, че B може да се получи от K и от C с вмъкване по 7 цифри. Ако първо се заменят сините звездички, а след това червените, на втората стъпка получаваме B от K, а ако заменим първо червените, а после сините звездички, на втората стъпка получаваме B от C.

Задача 3. Колко най-малко топа трябва да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всички бели полета да са застрашени от тях? (Топът застрашава всички полета от реда и стълба, в който се намира.)

Решение: Необходими са най-малко 4 топа. Те могат да се поставят, например, както е показано на чертржа.

Тъй като топ на бяло поле застрашава 7 бели полета, а топ на черно поле застрашава 8 бели полета, а белите полета са общо 32, очевидно три топа не са достатъчни.



Задача 4. Дадени са три ненулеви реални числа a, b и c със свойството: в какъвто и ред да се поставят тези числа като коефициенти на квадратен тричлен, тричленът има реален корен. Вярно ли е, че всеки от възможните тричлени има положителен корен?

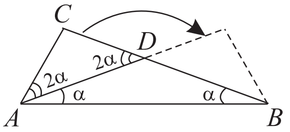
Решение: Ще докажем, че всеки тричлен от условието има положителен корен. Нека най-малкото по модул от дадените числа е c.

Да допуснем, че някой от тричлените няма положителен корен, т.е има два отрицателни корена (корен 0 няма, тъй като коефициентите са ненулеви). От формулите на Виет следва, че коефициентите на този тричлен (a, b, c в някакъв ред) са с еднакъв знак. Тъй като тричленът $ax^2 + cx + b$ има реален корен, то дискриминантата му е неотрицателна, т.е. $c^2 - 4ab \geq 0$. От друга страна, от избора на c следва, че $c^2 \leq |a||b| < 4|ab|$. За да са изпълнени едновременно тези неравенства, трябва a и b да са с различни знаци. Протворечие.

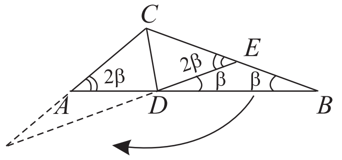
Задача 5. а) Торта има форма на тръгълник Δ_1, в който един ъгъл е три пъти по-голям от друг. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

б) Същата задача за торта с форма на тъпоъгълен триъгълник, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли.

Решение: а) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$. На страната CB отбелязваме точка D така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$ и разрязваме по отсечката AD. Получават се два равнобедрени триъгълника. Като залепим отсечката AD на $\triangle ADC$ към отсечката DB, получаваме желаната форма (фиг. 1).



Фиг. 1



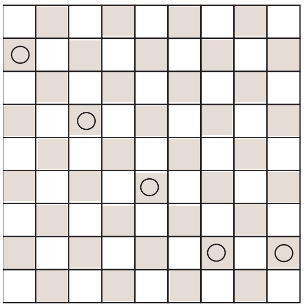
Фиг. 2

б) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B = 2\beta$. На страната BC отбелязваме точка E, симетрична на A относно ъглополовящата CD. Триъгълникът DBE е равнобедрен (тъй като $\sphericalangle DEC = 2\beta$ и $\sphericalangle DBE = \beta$, то $\sphericalangle BDE = \beta$). Като отрежем $\triangle DBE$ и прилепим неговата страна DE към равната и отсечка AD, получаваме торта с подходяща форма (фиг. 2).

Пролетен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Полетата на дъска 9×9 са шахматно оцветени, като ъгловите полета са бели. Колко най-малко топа трябва да се поставят на дъската така, че те да застрашават всички бели полета?

Решение: Пример с 5 топа, които застрашават всички бели полета, е показан на чертежа.



От друга страна, топ на бяло поле застрашава 7 или 9 бели полета, а топ на черно поле застрашава 9 бели полета. Тъй като белите полета са 41, четири топа очевидно не са достатъчни.

Задача 2. Многочленът x^3+px^2+qx+r има три корена в интервала $(0;2)$. Докажете неравенството $-2<p+q+r<0$.

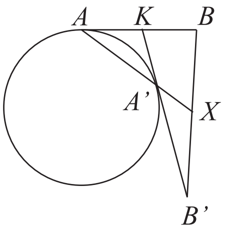
Решение: Да означим дадения многочлен с $P(x)$. Ако x_1, x_2, x_3 са трите му корена, то $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Да разгледаме стойността на многочлена при $x=1$. Имаме

$$1+p+q+r=P(1)=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3).$$

Всеки от множителите в последното произведение е по модул по-малък от 1, следователно $-1<1+p+q+r<1$, което е еквиавалентно на твърдението на задачата.

Задача 3. Права се допира до окръжност с център O в точка A. На правата е избрана точка B и е построен образът $A'B'$ на отсечката AB при ротация с център O. Докажете, че правата през допрните точки A и A' разполовява отсечката BB'.

Решение: Нека правите AB и $A'B'$ се пресичат в т. K и $AA'\cap BB'=X$.



Тъй като ротацията е еднаквост, то $AB=A'B'$. Също, при ротаця образът на допирателна права е отново допирателна; получаваме равенството $KA=KA'$. По теоремата на Менелай за $\triangle BKB'$, пресечен с правата AA', имаме

$$\frac{A'B'}{A'K}\cdot\frac{KA}{BA}\cdot\frac{BX}{XA}=1.$$

Следователно $BX=AX$, което трябваше да се докаже.

Случаят, когато $AB||A'B'$ е очевиден от съображения за централна симетрия.

Задача 4. Редица от нули и единици е образувана по правилото: в k-та позиция се записва нула, когато сборът от цифрите на числото k е четен, а единица, когато сборът от цифрите на числото k е нечетен. Докажете, че редицата не е периодична.

(Началото на редицата е: 1010101011010101010 01...)

Решение: Нека редицата има период $d < 10^n$. Сборът на цифрите на числата 10^n и 10^{n+1} е равен на 1, а сборът на цифрите на числата $10^n - d$ и $10^{n+1} - d$ се различава с 9, т.е. сборовете са с различна четност. Противоречие.

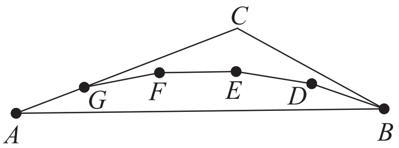
Ако има предпериод, числото n се избира така, че $10^n - d$ да е по-голямо от дължината на предпериода.

Задача 5. а) Торта има форма на тъпоъгълен тръгълник Δ_1, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

б) Същата задача за торта с форма на триъгълник с ъгли 20°, 30°, 130°.

Решение: а) Виж задача 5. б) от тренировъчния вариант за 7. - 9. клас.

б) Нека в $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle A = 20°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 130°$.



Изрязваме шестоъгълник $ABDEFG$ с $\sphericalangle G = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F = 170°$, ъгли по 20° при страната AB и страни $BD = DE = EF = FG = GA$. (За да построим този шестоъгълник може, например, да построим дъга, от точките на която отсечката AB се вижда под ъгъл 155° и да я разделим на 5 равни части.)

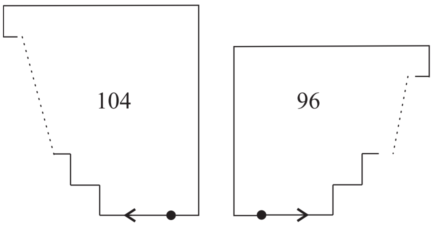
Оставащият неизпъкнал шестоъгълник преместваме така, че страната му GF да се прилепи към страната AG на шестоъгълника $ABDEFG$.

Избрани задачи от Турнира на градовете

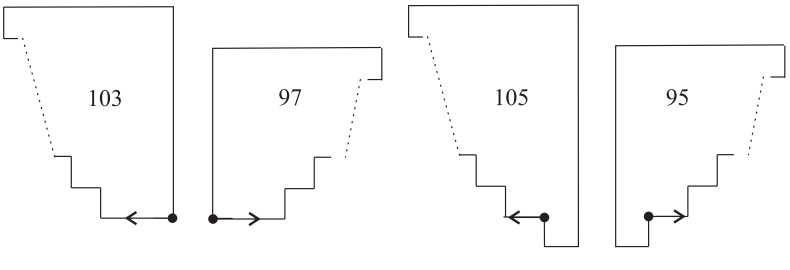
Няколко лесни интересни задачи

Задача 1. Всяка улица в един град е двупосочна, в посока или север - юг, или изток - запад. Шофьор пътувал из града по несамопресичащ се маршрут, направил 100 леви завоя и се върнал на мястото, от което тръгнал. Колко десни завоя е направил шофьорът?

Решение: Шофьорът се е разходил по контура на несамопресичащ се многоъгълник. Да допуснем първо, че началната точка не е връх на многоъгълника. Тогава шофьорът е направил общо едно завъртане (360°) около оста си. Всеки завой е на четвърт оборот (90°) наляво или надясно. Следователно сборът от завоите наляво се различава от сбора на завоите надясно с точно едно пълно завъртане, т.е. с 4 завоя. Това означава, че ако в маршрута има x леви завоя, десните завои са $x \pm 4$. Следователно шофьорът е направил 104 или 96 десни завоя (в първия случай пълното завъртане е в посока на часовниковата стрелка, а във втория – в обратна посока).



Случаят, когато шофьорът е тръгнал от връх на многоъгълника,се свежда към разгледания случай, като разликата е, че последният завой ”не се брои”. Ако този завой е десен, левите завои в маршрута са 100, а десните са $104 - 1 = 103$ или $96 - 1 = 95$. Когато последният завой е ляв, освен него трябва да има още 100 леви завоя. За 101 леви завоя в маршрута има $101 - 4 = 97$ или $101 + 4 = 105$ десни завоя.



Следователно десните завои са 95, 96, 97, 103, 104 или 105.

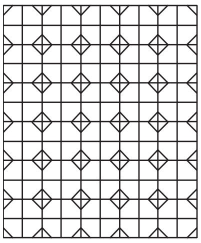
Задача 2. От лист на квадратчета е изрязан правоъгълник 10×12. Той е прегънат няколко пъти по линиите на квадратната мрежа, докато се получи квадрат 1×1. Колко части могат да се получат, ако този квадрат се разреже по отсечката, свързваща

а) средите на две срещуположни страни;

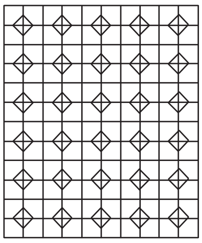
б) средите на две съседни страни.

Решение: а) Нека разрязването е вертикално и във всички единични квадратчета построим вертикални отсечки, свързващи среди на срещуположни страни. При сгъване по линиите на квадратната мрежа тези отсечки се наслагват една върху друга. Следователно разрязването става по тези и само тези отсечки. При това се получават или $10 + 1 = 11$, или $12 + 1 = 13$ части.

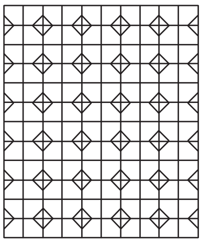
б) Всяко единично квадратче е разрязано по една от четирите отсечки, свързващи среди на съседни страни. Ако изберем един от четирите начина за разрязване на кое да е квадратче, разрезите в останалите квадратчета са еднозначно определени. Броят на получените части е $6.7 + 1 = 43$ (фиг. 1), $5.6 + 1 = 31$ (фиг. 2), $6.6 + 1 = 37$ (фиг. 3) или $5.7 + 1 = 36$ (фиг. 4).



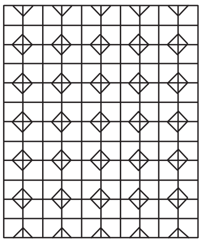
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Задача 3. Даден е лист карирана хартия с размери 9×9. Колко най-много единични квадратчета може да се разрежат по двата диагонала, без листът да се разпадне на части?

Решение: Ще докажем, че могат да се разрежат най-много 21 квадратчета. Забелязваме, че:

1. две съседни квадратчета не могат да се разрежат едновременно, без листа да се разпадне;
2. гранични квадратчета не могат да се разрязват;
3. във вътрешен правоъгълник 3×4 могат да се разрежат най-много 5 квадратчета (проверете!).

"Вътрешната" част на дадения квадрат е квадрат с размери 7×7, който се състои от четири правоъгълника 3×4 и централното единично квадратче. Следователно разрязаните квадратчета са най-много $4.5+1 = 21$ (прибавено е централното квадратче, което не е включено в разглежданите правоъгълници). Пример за такова разрязване е следният:

	x		x		x		x	
		x				x		
	x		x		x		x	
				x				
	x		x		x		x	
		x				x		
	x		x		x		x	

Задача 4. Колко най-малко единични квадратчета трябва да се очертаят, за да се нарисува квадрат 25×25, разделен на 625 единични квадратчета?

Решение: За да се очертае границата на големия квадрат, трябва да се нарисуват $24.4 = 96$ гранични квадратчета. Разделяме вътрешния квадрат 23×23 на $\dfrac{23.3-1}{2} = 264$ на брой правоъгълника 2×1, като едно квадратче остава. Поне едно от двете квадратчета във всеки правоъгълник 2×1 трябва да се нарисува, за да е начертана разделящата ги отсечка. Следователно са очертани поне още 264 квадратчета; общо поне $96 + 264 = 360$.

Тези 360 квадратчета са достатъчни: като оцветим квадрата 23×23 шахматно и нарисуваме 264-те едноцветни квадратчета, останалите 265 квадратчета от другия цвят също ще са очертани.

Задача 5. Във всеки връх на куб е записано число. За един ход всяко число се заменя със средното аритметично на числата, които са записани в трите му съседни върха (замяната става едновременно). На десетия ход във всеки връх на куба се оказва отново числото, което е записано там в началото. Следва ли оттук, че всички числа са равни?

Решение: Възможно е записаните числа да са различни. Например, нека във върховете A, C, B_1, D_1 на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ запишем 0, а във върховете B, D, A_1, C_1 запишем 1. След първия ход във върховете, в които е била записана 1, ще стои 0 и обратно, а след втория ход във всеки връх ще се окаже изходното число (а значи и след 10 хода също).

На шахматната дъска

Задача 1. Иван поставя на шахматна дъска топове по следния начин: избира произволно поле за първия, а всеки следващ топ атакува нечетен брой от поставените до този момент топове. (Топовете се атакуват хоризонтално и вертикално и то само ако между тях няма други фигури.) Колко най-много топа може да постави Иван на дъската?

Решение: Не е възможно да се поставят топове във всички ъглови полета на дъската, тъй като последният поставен ще застрашава два топа, което противоречи на правилата. Следователно топовете са най-много 63.

Ето пример за поставяне на 63 топа:

2	28	35	42	49	56	63	3
16	27	34	41	48	55	62	10
17	26	33	40	47	54	61	11
18	25	32	39	46	53	60	12
19	24	31	38	45	52	59	13
20	23	30	37	44	51	58	14
21	22	29	36	43	50	57	15
1	4	5	6	7	8	9	

Задача 2. Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)

Решение: Ще докажем, че могат да се свалят най-много 59 топа.

Първо да отбележим, че нито един от топовете в ъгловите полета не може да се свали. Да допуснем, че първо е свален ”ъгловият” топ от $a1$. В момента преди свалянето си той е заплашвал два топа: някой от намиращите се на линия a (там е поне $a8$) и някой от намиращите се на линия 1 (там е поне $h1$). Противоречие.

Ако на дъската са само ъгловите топове, то няма поле, което се заплашва от нечетен брой топове. Следователно не можем да оставим само четирите ъглови топа (иначе последният свален топ ще е заплашвал 0 или 2 топа).

Следователно на дъската ще останат поне 5 топа. Ето как последователно могат да се свалят останалите 59 топа (полетата са номерирани в реда на сваляне на топовете):

⊕	48	47	46	44	41	37	⊕
27	49	50	45	43	40	36	32
26	21	51	52	42	39	35	31
25	20	15	53	54	38	34	30
24	19	14	10	55	56	33	29
23	18	13	9	6	57	58	28
22	17	12	8	5	3	59	⊕
⊕	16	11	7	4	2	1	⊕

Задача 3. Колко най-много коня могат да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всеки от тях да застрашава най-много седем други коня?

Решение: Ще докажем, че максималният брой коне е 60. Например, ако поставим коне във всички полета на дъската, освен в четирите полета на централния квадрат 2×2, всеки кон застрашава не повече от 7 други коня.

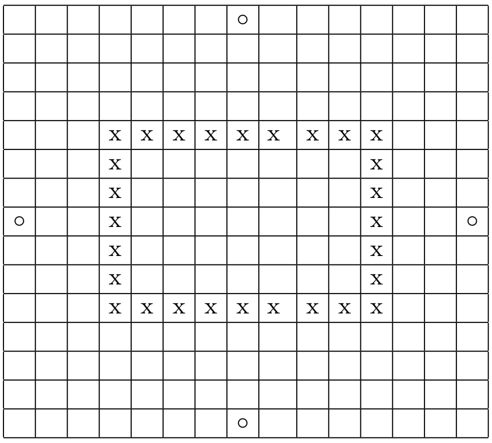
Да разгледаме централния квадрат 4×4. Ако в него се поставят 12 или по-малко коня, то общият брой на конете ще бъде не повече от 60.

○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○			○	○	○
○	○	○			○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

Нека в централния квадрат 4×4 са поставени не по-малко от 13 коня. Всеки от тях застрашава 8 полета на дъската, едно от които трябва да е празно. Всяко такова празно поле се застрашава от не повече от 4 коня от централния квадрат. Следователно празните полета са не по-малко от $13 : 4 = 3,25$, т.е. от 4 и конете са не повече от 60.

Задача 4. Колко най-малко полета на дъска 15×15 трябва да се оцветят, за да може със сигурност да се твърди, че поставен на произволно поле офицер заплашва поне две оцветени полета? (Офицерът заплашва всички полета от пресичащите се в неговото поле диагонали.)

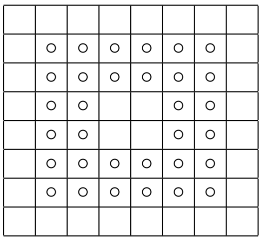
Решение: В показания пример оцветените полета са означени с x. С $\circ$ са означени полетата, от които офицерите заплашват два ъгъла на образувания от оцветените полета правоъгълник. Един от диагоналите през всяко от останалите полета пресича два пъти правоъгълника и следователно поставен там офицер заплашва поне две оцветени полета.



Ще докажем, че по-малък брой оцветени полета не е достатъчен. Офицер, който е поставен в някое от 56-те полета по границата на дъската, заплашва поне две оцветени полета. Тъй като всяко поле се заплашва от най-много четири офицера по границата, оцветените полета са най-малко $\dfrac{56.2}{4} = 28$.

Задача 5. В някои от полетата на дъска 8×8 са поставени пулове. Ако пул се намира в поле x, а полетата y и z са съседни на x по диагонал и са в едно и също диагонално направление с x, то този пул се смята за застрашен, когато в едно от полетата y и z има пул, а другото е празно. Колко най-много пула могат да се разположат на дъска 8×8 така, че всеки пул да е застрашен?

Решение: На дъската могат да се поставят 32 застрашени пула, както е показано на чертежа. Ще докажем, че не е възможно да се поставят повече от 32 застрашени пула. Ясно е, че пуловете са разположени само в централния квадрат 6×6, тъй като пул в поле по границата на дъската не може да е застрашен. Да разделим квадрата 6×6 на четири квадрата 3×3.

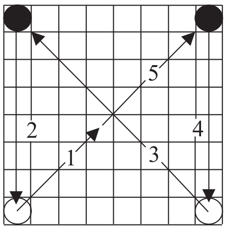


Във всеки от тези квадрати 3×3 поне едно поле е празно, тъй като в обратен случай поставеният в централното поле пул няма да е застрашен. Следователно поне четири полета в квадрата 6×6 са празни. Това означава, че могат да се поставят най-много $36 - 4 = 32$ застрашени пула.

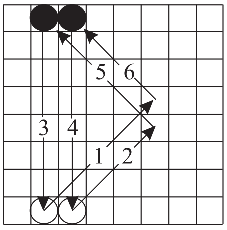
Задача 6. На първия ред на шахматна дъска са поставени 8 неразличими черни царици, а на последния ред са поставени осем неразличими бели царици. Колко най-малко хода са необходими, за да си разменят местата белите и черните царици? Ходовете на белите и черните царици се редуват, като при всеки ход се премества точно една царица. (Цариците се придвижват на произволен брой полета в хоризонтално, вертикално или диагонално направление, като нямат право да прескачат други фигури по пътя си.)

Решение: Ще докажем, че белите и черните царици могат да си разменят местата най-малко с 23 хода.

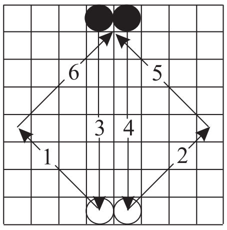
Тази от четирите царици в ъгловите полета на дъската, която първа напусне мястото си, ще трябва да направи минимум два хода. Следователно ъгловите царици трябва да направят общо поне $1.2 + 3.1 = 5$ хода (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Останалите царици разделяме на двойки срещуположни (стоящи в един и същ стълб). Тази от две срещуположни царици, която напусне мястото си първа, трябва да направи поне два хода, докато попадне на новото си място; така общо за двете срещуположни царици са необходими минимум $1.2 + 1 = 3$ хода (фиг. 2 и фиг. 3).

За шестте двойки са необходими $6.3 = 18$ хода; общо ходовете са 23.

Задача 7. Фигура се мести на 8 или 9 полета в хоризонтално или вертикално направление по дъска 15×15, като във всяко поле може да се постави най-много по един път. Колко най-много полета може да обходи фигурата?

Решение: Да номерираме редовете от горе на долу и стълбовете от ляво на дясно. На всяко поле съпоставяме координати (i, j), $i, j = 1, \ldots, 15$.

Ако фигурата тръгне от поле $(9, 7)$ и се движи по следните правила:

1. от поле в горната половина на дъската се премества или с 8 полета надясно, или с 9 полета наляво, ако поне една от тези операции е възможна (тъй като $9 + 8 > 15$, не са възможни и двете); иначе се премества с 9 полета надолу;

2. от поле в долната половина на дъската се премества, ако е възможно, или с 9 полета надясно, или с 8 полета наляво; иначе се премества с 8 полета нагоре;

тя ще обходи всички полета на дъската, освен тези от вида $(i, 8)$ и $(8, j)$ (образуващи ”кръст”), т.е. общо 196 полета. Това е максималният брой обходени полета, защото ако фигурата мине през поле от ”кръста”, то и предишния, и следващия ход е на ”кръста”, т.е. обхождането ще включва най-много 29-те полета на ”кръста”.

Задача 8. По шахматна дъска се движи "куц” топ, като с един ход преминава на съседно поле в хоризонтално или вертикално направление. Всеки маршрут на ”куция” топ минава точно по веднъж през всяко поле на дъската. Нека A е ъглово поле на шахматна дъска, а B е съседното му по диагонал поле. Докажете, че маршрутите на "куция” топ с начало A са повече от маршрутите му с начало B.

Решение: На всеки маршрут на куция топ с начало B ще съпоставим маршрут с начало A (като на различни маршрути съпоставяме различни). Това ще означава, че маршрутите от A са не по-малко от маршрутите от B. За да докажем, че маршрутите от A са повече, ще посочим маршрут с начало A, който не е съпоставен на нито един маршрут с начало B.

При стандартно шахматно оцветяване полетата A и B са едноцветни, а по пътя на куция топ се редуват бели и черни полета. Следователно няма маршрут с начало B и край A (или обратно). Тогава всеки маршрут с начало B минава през A по пътя YAZ или по пътя ZAY:

Y	B	
A	Z	

Разглеждаме съответствието:

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}YAZ\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AY\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на (1)}}BZ\underbrace{\ldots}_{(2)};$$

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}ZAY\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AZ\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на (1)}}BY\underbrace{\ldots}_{(2)}.$$

При това съответствие на всеки маршрут от B се съпоставя различен маршрут от A. Остава да забележим, че по този начин на нито един маршрут с начало B не се съпоставя маршрут с начало A и край Y или Z, какъвто лесно може да се построи (проверете!).

Задача 9. Полетата на шахматна дъска са номерирани с числата от 1 до 64 така, че съседните полета са номерирани с поредни числа. Колко най-малко е сборът на числата, номериращи полетата по един от диагоналите? (Съседни наричаме полета, които имат обща страна.)

Решение: Нека означим числата по диагонала с $a_1, a_2, \ldots, a_8$, като индексите показват реда на появяването им на диагонала. Тъй като в съседни полета се записват последователни числа, на всички едноцветни полета са записани числа с еднаква четност. Нека нечетните числа са записани в бели полета, а четните - в черни. Тогава $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 5, \ldots, a_7 \geq 13$.

В момента на номериране на последното диагонално поле, всички полета в едната от двете половини, на които диагоналът разделя дъската, трябва да са вече запълнени. Тогава, тъй като диагоналът е бял, броят на вече номерираните бели полета е поне 20 (12 в тази половина и 8 по диагонала). Следователно a_8 е най-малко 20-тото нечетно число, т.е. $a_8 \geq 39$ и сборът от числата по диагонала е поне $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 39 = 88$.

1							
2	3	4					
27	26	5					
28	25	6	7	8			
29	24	19	18	9			
30	23	20	17	10	11	12	
31	22	21	16	15	14	13	⋮
32	33	34	35	36	37	38	39

Задача 10. Полетата на шахматна дъска са номерирани по следния начин. Полето в горния ляв ъгъл е номер 1; съседните му отдясно и отдолу полета са номер 2 и 3 съответно, трите полета от следващия диагонал са номер 4, 5 и 6 и т.н. Всеки диагонал се номерира от най-горното си дясно поле към най-долното си ляво поле. Предпоследният диагонал съдържа полета с номера 62 и 63, а полето в долния десен ъгъл е номер 64. Петър слага 8 камъчета в 8 полета на шахматната дъска така, че във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. След това той премества всяко камъче в поле с по-голям номер, отколко номера на полето, в което е било поставено

първоначално. Възможно ли е отново във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче?

Решение: Ще докажем, че не е възможно след преместването във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. Нека на всяко камъче съпоставим неговите координати на шахматната дъска: камъчето в n-тия броен отляво надясно стълб и в m-тия броен отгоре надолу ред има координати (n, m).

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	4	7	11			
2	3	5	8	12				
3	6	9	13					
4	10	14						
5	15							55
6							56	59
7						57	60	62
8					58	61	63	64

Тъй като във всеки стълб има точно едно камъче, сборът от първите координати на всички камъчета е равен на $1+2+\cdots+8$. Аналогично, сборът от вторите координати на всички камъчета също е равен на $1+2+\cdots+8$; общият сбор от координатите им е $2(1+2+\cdots+8)$.

Да допуснем, че след преместването във всеки стълб и във всеки ред има по едно камъче. Това означава, че общият сбор от координатите на камъчетата ще бъде равен на $2(1+2+\cdots+8)$. При преместване на камъче в поле с по-голям номер то или се придвижва надолу по своя диагонал, или преминава в един от следващите (надясно) диагонали. Ако остане на своя диагонал, сборът от координатите на камъчето не се променя, но ако се премести в някой от намиращите се надясно диагонали, сборът от координатите му ще се увеличи. Следователно за да не се промени общият сбор на координатите на камъчетата, трябва всяко камъче да се премести надолу по своя диагонал. Това обаче е невъзможно, защото камъчето в най-долния ред не може да увеличи номера си, оставайки на своя диагонал. Противоречие.

Графи

Задача 1. В една държава някои градове са свързани с директни автобусни маршрути. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг (с евентуални прехвърляния). Иван си купил по един билет за всеки директен маршрут (т.е. може да пътува по всеки маршрут веднъж, независимо в коя посока). Петър купил по n билета за всеки маршрут. Иван и Петър отпътували от град A. Иван използвал всичките си билети, не купувал нови и накрая стигнал в град B. Петър известно време пътувал с купените от него билети и стигнал в град X, от който не може да продължи без да си купи нов билет. Докажете, че X е или A, или B.

Решение: По естествен начин съпоставяме на всеки град точка, а на всеки директен маршрут – отсечка, свързваща съответните точки. Получаваме граф, който Иван е обходил, тръгвайки от A и спирайки в B, като е минал по всяко ребро по веднъж. Тогава за всеки връх C, различен от A и B, е вярно, че:

- ребрата, по които Иван е влизал в C, са толкова на брой, колкото са ребрата, по които е излизал от C;

- по всяко ребро с край C Иван е минал точно един път.

Това означава, че от C излизат четен брой ребра. Като разсъждаваме по същия начин за краищата на маршрута, получаваме, че от A и B излизат по нечетен брой ребра.

Нека Петър се е оказал в град X, от който не може да продължи. Това означава, че е изпозвал всички билети за всички директни маршрути от X. Ако град X не е A или B, то от него излизат четен брой, например $2k$, ребра. Но тогава Петър е влизал и излизал от C точно $2kn$ пъти, т.е. четен брой пъти, редувайки влизане и излизане. Тъй като отначало Петър е влязъл в C, то последния път е излязъл от C. Получихме противоречие. Следователно Петър е спрял или в A, или в B, което трябваше да докажем.

Задача 2. В едно село всеки момък се познава с няколко моми, а две стари клюкарки знаят кой с кого се познава. Едната се похвалила, че може да сватоса всеки чернокос момък за мома, която той познава. Другата отговорила, че може да сватоса всяка русокоса мома за неин познат момък. Математик, който случайно чул техния разговор, казал: ”Значи е възможно да се сватосат момите и момците така, че да са изпълнени и двете условия”. Прав ли е той?

Решение: Ще докажем, че математикът е прав. Да сватосаме всеки чернокос момък за негова позната (както планира първата клюкарка) и всяка русокоса мома за неин познат (както планира втората). При това е възможно някой да е сватосан за две различни личности. Ще покажем как може да се поправи подобно объркване.

Нека на чернокосите момци съпоставим точки A_i, а на русокосите моми точки B_i, като всяко сватосване отбелязваме с отсечка (някои отсечки евентуално водят към тъмнокоси моми или русокоси момци). Тъй като всеки е включен в не повече от два проекто-брака, в получения граф от всеки връх излизат едно или две ребра. Граф, в който всеки връх има четност 1 или 2, се разпада на непресичащи се вериги. Ясно е, че всеки във веригата е сватосан за съседите си. Ако всички вериги са с дължина 2, т.е. от вида A_1B_1, то браковете не си противоречат. Да допуснем, че има верига с дължина не по-малка от 3 и да разгледаме следните случаи:

1. Ако веригата не е затворена и чернокосите момци и русокосите моми в нея са по равен брой, то тя е от вида $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_n$ или $B_1A_1\ldots B_nA_n$. В този случай браковете $A_i - B_i$ удовлетворяват условието (пренебрегваме възможните бракове на записаните в краищата на веригата с русокоси момци или тъмнокоси моми).

2. Веригата не е затворена и чернокосите момци и русокосите моми не са по равен брой. Ако, например, момците са с един повече, веригата е от вида $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_nA_{n+1}$. В този случай или A_1, или A_{n+1} е сватосан за тъмнокоса мома (тъй като първата клюкарка сватосва всеки чернокос момък за различна мома, а момците във веригата са с един повече от русокоските). Нека A_{n+1} е сватосан за тъмнокосата мома C. Тогава браковете $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$, $\ldots$, $A_n - B_n$, $A_{n+1} - C$ удовлетворяват условието.

3. Веригата е затворена, т.е. е от вида $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_nA_1$. Тогава браковете $A_i - B_i$ удовлетворяват условието.

По този начин всяка верига се разпада на непротиворечащи си бракове.

Задача 3. Във всеки ред на таблица $(n-2)\times n$ $(n\geq 3)$ са записани в някакъв ред числата от 1 до n така, че във всеки стълб числата са различни. Докажете, че таблицата може да се допълни до квадрат $n\times n$ така, че във всеки ред и стълб да са записани числата от 1 до n.

Решение: В дадената таблица всяко от числата $1, 2, \ldots, n$ е записано $n-2$ пъти (по един път във всеки ред). Нека под всеки стълб допишем двете липсващи в него числа. Така получаваме таблица $n\times n$, всеки стълб на която съдържа числата $1, 2, \ldots, n$. Това означава, че всяко от числата $1, 2, \ldots, n$ се среща в новата таблица n пъти, следователно е дописано точно два пъти.

Ще посочим алгоритъм за евентуално разместване на дописаните числа, така, че всеки от последните два реда да съдържа числата $1, 2, \ldots, n$.

Да запишем в редица числата $1, 2, \ldots, n$ и да свържем с отсечки тези от тях, които са дописани в един и същи стълб. Получаваме граф с n върха, всеки връх на който е с четност 2 (от всеки връх излизат две ребра). Следователно този граф е съставен от един или няколко цикъла, които можем да ориентираме в една и съща посока.

Тогава, ако реброто от графа, съответстващо на двойка дописани в един и същ стълб числа A и B, е ориентирано от A към B, поставяме A в горния, а B – в долния ред. Понеже във всяко число влиза стрелка и от всяко число излиза стрелка, то ще бъде по веднъж поставено във всеки от двата реда. Така получаваме търсеното разположение.

Задача 4. Изпъкнал N-ъгълник е разбит на триъгълници с помощта на непресичащи се във вътрешни точки диагонали. Триъгълниците са оцветени в черно и бяло така, че всеки два триъгълника с обща страна са разноцветни. За всяко N намерете максималната разлика между броя бели и черни триъгълници.

Решение: Да разгледаме граф, чиито върхове съответстват на триъгълниците от дадената триангулация и са оцветени като тях. Ребрата на графа свързват върхове, съответстващи на триъгълници с обща страна. Ясно е, че от всеки връх излизат най-много 3 ребра и разглежданият граф е дърво (свързан граф без цикли).

Нека броят на черните върхове е не по-малък от броя на белите. С $f(N)$ ще означаваме максималната разлика между броя черни и бели измежду N върха. Имаме $f(3) = 1, f(4) = 0, f(5) = 1$, като при всеки от тези случаи оптималният граф съдържа черен връх, от който излиза само едно ребро. Ако този черен връх свържем с нов бял връх, а белият – с два нови черни върха, ще получим граф от разглеждания вид, който има с 3 върха повече и разликата между броя черни и бели върхове при него е с 1 по-голяма. Следователно,

$$f(N+3) \geq f(N) + 1 \quad \text{при} \quad N \geq 3.$$

Оттук по индукция за всеки от случаите $N = 3k$, $N = 3k + 1$ и $N = 3k + 2$ получаваме, че за $k \geq 1$

$$f(3k) \geq k, \qquad f(3k+1) \geq k - 1 \quad \text{и} \quad f(3k+2) \geq k.$$

Ще докажем, че тези оценки са точни.

- При $N = 3k$ броят на върховете е $3k - 2$. Нека x от тях са бели; от тях излизат най-много $3x$ ребра. Остават $3k - 2 - x$ черни върха, свързани с поне $3k - 2 - x$ ребра към дървото. Освен това, x-те бели върха са свързани посредством черни; за връзка бял - черен - бял са необходими две ребра, излизащи от черен връх. Така x-те бели върха определят поне $x - 1$ двойки от вида бял - черен - бял и изискват поне още $x - 1$ ребра, излизащи от черни върхове. Следователно от черните върхове излизат поне $3k - 2 - x + (x - 1) = 3k - 3$ ребра. Тъй като броят на ребрата, излизащи от черни върхове, е равен на броя на ребрата, излизащи от бели върхове, то $3x \geq 3k - 3$ или $x \geq k - 1$. Седователно разликата между броя черни и бели върхове е $3k - 2 - x - x \leq 3k - 2 - 2(k - 1) = k$.
- При $N = 3k + 1$ аналогично получаваме неравенството $3x \geq 3k - 2$, т.е. $x \geq k$ и разликата е $3k - 1 - x - x \leq 3k - 1 - 2k = k - 1$.
- При $N = 3k + 2$ имаме $3x \geq 3k - 1$, т.е. $x \geq k$ и за търсената разлика имаме $3k - x - x \leq 3k - 2k = k$.

Задача 5. Във вътрешността на квадрат са отбелязани няколко точки. Те са свързани помежду си и с върховете на квадрата чрез непресичащи се във вътрешни точки отсечки така, че квадратът се разделя на триъгълници. При това всяка от точките е е връх на триъгълник и не е вътрешна точка за страна на триъгълник. Възможно ли е при такава конфигурация от всяка от отбелязаните точки и от всеки връх на квадрата да излизат четен брой отсечки?

Решение: Да допуснем, че от всеки връх на квадрата и от всяка от отбелязаните точки излизат четен брой отсечки.

Построяваме граф, като на всеки триъгълник от триангулацията съпоставяме връх и свързваме с ребро върховете, съответстващи на съседни (с обща страна) триъгълници. Ясно е, че всяко ребро на този граф пресича една отсечка от триангулацията. Ще докажем, че в графа всеки цикъл пресича четен брой триангулиращи отсечки, т.е. всеки цикъл е с четна дължина.

За произволен цикъл да означим с $A_1, \ldots, A_k$ точките от триангулацията, които са във вътрешността му. Те са краища съответно на $2a_1, \ldots, 2a_k$ триангулиращи отсечки, от които съответно $b_1, \ldots, b_k$ не пресичат цикъла. Тогава в сбора $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ всяка отсечка е броена по два пъти (и двата и края са вътрешни за цикъла точки), т.е. този сбор е четен. Броят на отсечките от триангулацията, които пресичат цикъла, е равен на $2a_1 + \cdots + 2a_k - (b_1 + \cdots + b_k)$ и следователно също е четен.

Тогава върховете на графа могат да се оцветят в два цвята така, че всеки два свързани с ребро (съседни) върха да са разноцветни. Започваме оцветяването от произволен връх, след това оцветяваме всички негови съседни върхове в противоположния цвят и продължаваме с техните съседни. Ако при това се окаже, че даден връх трябва да оцветим в цвета на негов вече оцветен съсед, това ще означава, че в графа съществува цикъл с нечетна дължина, което е невъзможно.

Така получаваме двуцветно "шахматно” оцветяване на триангулирания квадрат. Тъй като от всеки връх на квадрата излизат четен брой $(2k)$ отсечки, той е връх на нечетен брой $(2k - 1)$ триъгълници. Следователно триъгълниците, включващи страна на квадрата, са едноцветни, например бели.

Нека броят на белите триъгълници е x, а броят на черните е y. Броят на страните на белите триъгълници е $3x$, а броят на страните на черните е $3y$. Но всяка отсечка, освен четирите страни на квадрата, е страна и на бял, и на черен триъгълник. Получаваме равенството $3x - 3y = 4$, което е невъзможно.

Игри и стратегии

Задача 1. Числата $1, 2, \ldots, 2002$ са записани на 2002 картончета. Двама играчи поред избират по едно картонче до изчерпването им и накрая всеки пресмята сбора от числата на неговите картончета. Победител в играта е този, който е получил сбор с по-голяма цифра на единиците. Кой от играчите има печеливша стратегия и каква е тя?

Решение: От значение за играта са само цифрите на единиците, затова ще смятаме, че има по 201 от картончетата с цифрите 1 и 2 по 200 картончета с всяка от останалите цифри. Първият играч има следната печеливша стратегия: започва с 2 и след това повтаря ходовете на първия. Ако в даден момент първият вземе последното картонче с цифрата 1, вторият избира коя да е цифра x и повтаря ходовете на втория, докато вторият вземе последното картонче с x. По този начин първият ще получи сбор с последна цифра 2, а първият - с последна цифра 1.

Задача 2. Дъска е съставена от 23×23 полета. В долното ляво и горното дясно полета поставили по една бяла фигура, а в горното ляво и долното дясно - по една черна фигура. Редуват се ходове на белите и черните фигури, като започват белите. На всеки ход една фигура се премества в свободно съседно (по страна) поле. Могат ли черните фигури да попречат на белите да заемат две съседни по страна полета?

Решение: Ще докажем, че черните фигури могат да играят така, че след техен ход всички фигури да са във върховете на правоъгълник с успоредни на страните на дъската страни, като в срещуположните върхове стоят едноцветни фигури.

В началото на играта това условие е изпълнено. След това черните играят симетрично: ако бяла фигура прави хоризонтален (вертикален) ход, намиращата се преди това в същия вертикал (хоризонтал) черна фигура се придвижва по същия начин. Така фигурите отново се намират във върховете на правоъгълник и едноцветните фигури са в срещуположните върхове. Следователно белите не могат да застанат в съседни полета.

Задача 3. В началото на една игра на дъската е записано числото $2004! = 1.2.3...2004$. Двама играчи редуват ходовете си. За един ход всеки играч изважда от написаното на дъската число X някое естествено число $Y \leq X$, което има не повече от 20 различни прости делители; записва на дъската разликата $X - Y$ и изтрива старото число X. Печели играчът, който получи 0. Кой от играчите (който прави първия ход или неговият съперник) има печеливша стратегия и каква е тя?

Решение: Нека P е произведението на първите 21 прости числа. Вторият играч има печеливша стратегия, ако винаги оставя на противника си кратно на P число. Това му гарантира успех, тъй като 2004! и 0 са кратни на P.

Ще покажем, че такава стратегия е изпълнима. Нека първият играч е получил кратно на P число n и избере да извади от него m. Получената разлика d не е кратна на P, тъй като в обратен случай и m трябва да е кратно на P, а m има не повече от 20 прости делителя. Тогава вторият играч избира остатъка $r > 0$ на d при деление с P. Тъй като $r < P$, е сигурно, че r има не повече от 20 прости делителя.

Задача 4. Борис и Кирил играят следната игра: Борис намисля цяло число по-голямо от 100, а Кирил му казва цяло число d, по-голямо от 1. Ако числото на Борис се дели на d, Кирил печели; в обратен случай Борис изважда от своето число d и играта продължава. Кирил няма право да казва едно и също число няколко пъти. Ако числото на Борис стане отрицателно, Кирил губи. Може ли Кирил да играе така, че със сигурност да спечели?

Решение: Ще покажем стратегия, която винаги ще води Кирил до успех.

1. Кирил избира $d = 2$. Ако не спечели, то числото на Борис е нечетно.
2. Кирил продължава с $d = 3$. Ако не спечели, то първоначално избраното от Борис число е от вида $6k + 1$ или $6k + 3$. След този ход числото на Борис е $6k + 1 - 2 - 3$ или $6k + 3 - 2 - 3$, т.е. от вида $6k + 2$ или $6k + 4$.
3. Кирил избира $d = 4$. Ако не печели, това би означавало, че непосредствено преди неговия ход числото на Борис е било от вида $12k+2$ или $12k + 10$. След този ход то става $12k + 10$ или $12k + 6$.
4. Кирил избира $d = 6$. Ако не печели, това означава, че преди неговия ход числото на Борис е било от вида $12k + 10$ и след този ход то става $12k + 4$.
5. Кирил избира $d = 16$. Ако $12k + 4$ не се дели на 16, Борис получава число от вида $12k+4-16 = 12k-12$ и на следващия си ход Кирил казва 12 и печели. (Сборът от изважданите числа $2+3+4+6+16=31$ е помалък от 100, което гарантира, че числото на Борис не е отрицателно.)

Задача 5. Двама играчи поред вземат камъни от купчина. При всеки свой ход първият играч може да вземе или 1, или 10 камъка, а вторият може да вземе или m, или n камъка. Губи този, който не може да направи ход. Ако първият има стратегия, която му гарантира победа независимо от първоначалния брой камъни в купчината, намерете m и n.

Решение: Ще докажем, че числата m и n са не по-малки от 9, като модулът на разликата им не е равен на 9.

Да допуснем, че някое от числата m и n е по-малко от 9 (например m). Тогава ако имаме купчина с $m + 1$ камъка, първият ще е длъжен с първия си ход да вземе 1 камък (тъй като $m + 1 < 10$), след което вторият взема m камъка и печели – противоречие. Следователно и m, и n са по-големи или равни на 9.

Да допуснем, че $m - n = 9$. Тогава ако имаме купчина с $m + 1 = n + 10$ камъка, първият взема 1 камък, вторият m камъка или първият взема 10 камъка, вторият n камъка, като и в двата случая вторият печели – противоречие. Следователно $|m - n| \neq 9$.

Ще докажем, че при останалите стойности на m и n първият печели.

Нека в купчината има k камъка и първият е на ход. Ако $k \leq 10$, първият печели с един ход (вземайки 10 камъка, ако $k = 10$, или 1 камък, ако $k \leq 9$).

Ако $k > 10$, след своя ход първият оставя в купчината или $k - 1$, или $k - 10$ камъка. Ако в единия случай се получава m, а в другия – n, то модулът на разликата между m и n ще бъде равен на 9 – противоречие. Следователно първият може да направи ход така, че вторият след това да не спечели с един ход. Тъй като броят на камъните в купчината намалява, накрая ще спечели първия.

Задача 6. Даден е шоколад с форма на равностранен триъгълник със страна n, разделен на еднакви триъгълни блокчета със страна 1 (като всяка страна е разделена на n равни части и точките деление на всяка двойка страни са свързани с успоредни на третата страна улейчета). Двама математици играят следната игра: за един ход всеки от тях отчупва от шоколада триъгълно парче (по някое от улейчетата), изяжда го и предава парчето на другия. Побеждава този, който получи триъгълно парче със страна 1. Ако по време на играта някой от играчите не може да направи ход, той преждевременно губи. За всяко n определете кой от играчите има печеливша стратегия и каква е тя.

Решение: Ясно е, че по улейчетата могат да се отчупват само равностранни триъгълници. Ще докажем, че ако n е просто число, печели вторият, а ако е съставно - първият.

След като първият отчупи триъгълник със страна x, остава парче с форма на равнобедрен трапец с основи x и n, бедро $(n - x)$ и ъгъл 60^o.

Ако вторият отчупи от единия остър ъгъл на трапеца триъгълно парче със страна по-малка от $n - x$, първият може да отчупи същото парче от другия остър ъгъл на трапеца. Така вторият играч ще получи шестоъгълно парче и ще загуби.

Нека вторият отчупи триъгълник със страна $n-x$. Пред първия е парче с форма на успоредник със страни x и $n-x$. За да не получи шестоъгълник и да загуби, той трябва да отчупи равностранен триъгълник със страна $\min\{x, n - x\}$. Така вторият играч отново получава трапец и е поставен в аналогична ситуация.

Забелязваме, че тази операция е аналогична на алгоритъма на Евклид за числата x и n. Следователно след определен брой ходове вторият ще получи триъгълно парче със страна, равна на НОД(n, x) и ако n и x са взаимнопрости, той ще победи. Следователно при просто число n вторият винаги побеждава.

Ако n е съставно число, първият може да избере x като един от простите делители на n. Когато вторият получи триъгълно парче със страна, равна на НОД$(n, x) = x$, той е в позицията на първия за n - просто, която е губеща. Следователно печели първият.

Задача 7. Емил и Иван си делят купчина от 25 монети с тегла $1, 2, 3, \ldots, 25$ грама. Първи на ход е Емил, а по-нататък на ход е този, който е събрал монети с по-голямо общо тегло от монетите на другия. Ако теглата на монетите и на двамата са равни, на ход е този, който е бил на ход преди това. Този, който е на ход избира монета от купчината, а противникът му казва на кого да бъде дадена тя. Може ли Емил да играе така, че теглото на събраните от него монети в края на играта да бъде по-голямо от теглото на монетите на Иван, или Иван винаги може да предотврати това?

Решение: Първо ще отбележим, че тази игра не може да завърши с равенство, тъй като общото тегло на монетите е нечетно. Това означава, че един от играчите има печеливша стратегия (докажете!).

Да допуснем, че Емил има печеливша стратегия. Нека той е направил първия ход. Тогава Емил трябва да може да отговори на всеки ход на Иван така, че в крайна сметка да спечели. Но ако Иван каже, че избраната от Емил монета трябва да се даде на Иван, то той ще се окаже в същата ситуация, в каквато би се оказал Емил, ако Иван беше казал монетата да се даде на Емил (и Емил при това щеше да знае как да спечели). Следователно Иван може да се възползва от тази стратегия и да спечели – противоречие. Следователно Емил няма печеливша стратегия, което означава, че печеливша стратегия има Иван.

Инварианти и полуинварианти

Задача 1. Правилен $(2n+1)$-ъгълник е разрязан с помощта на непресичащи се във вътрешни точки диагонали на $2n-1$ триъгълника. Докажете, че поне три от тях са равнобедрени.

Решение: Страните на триъгълниците са страни или диагонали на многоъгълника. Триъгълници, образувани от две страни на многоъгълника и диагонал, ще наричаме *малки*. Ясно е, че има поне два малки триъгълника. (Триъгълниците са $2n-1$, а страните на многоъгълника са $2n+1$.)

Малките триъгълници са равнобедрени и ако има три такива, твърдението е доказано.

Да допуснем, че малките триъгълници са точно два. Ясно е, че всеки от останалите $2n-3$ триъгълници има за страна точно една страна на многоъгълника. Ако "изрежем"такъв триъгълник, многоъгълникът ще се разпадне на две части. Нека се движим от единия малък триъгълник към другия, преминавайки от триъгълник в триъгълник през тяхна обща страна. При всеки преход ще отбелязваме колко страни на многоъгълника има във всяка от двете части, на които триъгълника, в който сме стигнали, разделя многоъгълника. В началото тези числа са 2 и $2n-2$. При всеки преход първият брой се увеличава с 1, а вторият намалява с 1. В момента, когато се изравнят (и станат равни на n), ще се намираме в търсения трети равнобедрен триъгълник.

Задача 2. Върховете на 50-ъгълник разделят окръжност на 50 дъги, чиито дължини в някакъв ред са $1, 2, \ldots, 50$. Известно е, че дължините на всяка двойка срещуположни дъги (съответстващи на срещуположни страни на 50-ъгълника), се различават с 25. Докажете, че 50-ъгълникът има поне две успоредни страни.

Решение: Да означим противоположната дъга на дъгата A_1 с B_1. Лява сума на A_1 – $L(A_1)$ – ще наричаме сбора от дължините на дъгите, намиращи се между A_1 и B_1 при обхождане по посока на часовниковата стрелка, а дясна сума на A_1 – $R(A_1)$ – сбора от дължините на дъгите между A_1 и B_1 при обхождане по посока обратна на часовниковата стрелка. Ясно е, че при тази дефиниция $L(A_1) = R(B_1)$ и $R(A_1) = L(B_1)$.

Ако $L(A_k) = R(A_k)$, то съответстващите на A_k и B_k страни на многоъгълника са успоредни; следователно е достатъчно да докажем, че разликата $S(A_k) = L(A_k) - R(A_k)$ се анулира за някоя дъга A_k.

Първо ще отбележим, че $S(A_k)$ може да се запише като сбор на 24 разлики на дължини на срещуположни дъги. Всяка разлика е 25 или -25 и

$S(A_k) = p.25 - q.25$, където $p + q = 24$. Оттук $S(A_k) = 50p - 24.25 = 50(p - 12)$, т.е. $S(A_k)$ е кратна на 50.

Нека A_2 е съседната на A_1 дъга по посока на часовниковата стрелка. Тогава $L(A_2) = L(A_1) - A_2 + B_1$ и $R(A_2) = R(A_1) + A_1 - B_2$. Следователно $S(A_2)$ се различава от $S(A_1)$ с 0 или ± 50. По-нататък, движейки се по посока на часовниковата стрелка към B_1, всеки път ще получаваме за $S(A_k)$ кратно на 50 число, докато стигнем до $S(B_1) = -S(A_1)$. Следователно в някоя от дъгите A_k разликата $S(A_k)$ се анулира, което искахме да докажем.

Задача 3. По окръжност са записани няколко положителни числа, всяко от които е не по-голямо от 1. Докажете, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че сборът от числата, записани на всяка дъга, да се различава от сбора на записаните на коя да е друга дъга числа с не повече от 1. (Ако на дъгата няма числа, сборът от записаните на нея числа се приема за 0.)

Решение: Условието на задачата е еквивалентно на това, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че разликата между най-големия и най-малкия сбор да е по-малка от 1.

Разделяме окръжността на три произволни дъги A_0, B_0 и C_0 със сборове на записаните на тях числа съответно a, b и c, като $a \leq b \leq c$. По-нататък ще действаме по следния начин: ако $c - a > 1$, преместваме границата между дъгите A и C така, че точно едно число от дъгата C да премине на дъгата A. Нека това число е r. След тази операция получаваме нови дъги A_1, B_1 и C_1 със сборове $a + r$, b, $c - r$.

Да разгледаме тройките $S_1 = \{a, b, c\}$ и $S_2 = \{a + r, b, c - r\}$.

Ако $a = b < c$, тъй като $a < c - 1 \leq c - r$, то най-малкият сбор в S_2 $b(= a)$, т.е. равен е на най-малкия сбор в S_1. Най-големият сбор в S_2 е по-малък от най-големия сбор c в S_1, тъй като всяко от числата в S_2 е по-малко от c.

Ако $a < b \leq c$, от неравенствата $a + r \leq a + 1 < c$, $b \leq c$, $c - r < c$ следва, че всеки сбор в S_2 (а значи и най-големият) не надхвърля най-големия сбор c в S_1. От друга страна, $a < a + r$, $a < b$ и $a < c - 1 \leq c - r$, т.е. всеки сбор в S_2 (а значи и най-малкият) е по-голям от най-малкия сбор a в S_1.

И в двата случая разликата между най-големия и най-малкия сбор намалява при второто разделяне на окръжността. Следователно настъпва момент, когато тази разлика става по-малка от 1.

Задача 4. Остроъгълен триъгълник е разрязан по права на две части (не задължително триъгълни), след това една от тях отново е разрязана на две части и така нататък: на всяка стъпка някоя от наличните части се разрязва праволинейно на две части. Може ли след няколко стъпки да се окаже, че всички получени части са тъпоъгълни триъгълници?

Решение: Ще докажем, че ако в многоъгълника M има поне три нетъпи ъгъла (условие, което е изпълнено в началото), то след разрязване в една от получените части (означаваме ги с M_1 и M_2) отново ще има поне три нетъпи ъгъла.

Нека правата, по която разрязваме, пресича M в точките A и B. Точка A е връх на два ъгъла (по един в M_1 и M_2).

Ако A е връх на тъп ъгъл в M или лежи на страна на M, то поне един от получените два ъгъла е нетъп (тъй като сборът им не надхвърля $180°$); следователно броят на нетъпите ъгли се увеличава с поне още един.

Ако A е връх на нетъп ъгъл на M, и двата получени ъгъла с връх A са нетъпи, следователно броят на нетъпите ъгли отново се увеличава с един.

Аналогично разсъждаваме за точка B. Така броят на нетъпите ъгли общо в M_1 и M_2 е поне 5. По принципа на Дирихле следва, че в поне един от многоъгълниците има поне три нетъпи ъгъла. Следователно остроъгълен триъгълник не може да се разреже по посочения начин на тъпоъгълни триъгълници.

Задача 5. Билярдна маса има форма на многоъгълник (не задължително изпъкнал), всеки две съседни страни на който са перпендикулярни. Във всеки връх на масата има джоб. От връх A с вътрешен ъгъл $90°$ излита топка и се движи във вътрешността на многоъгълника, отразявайки се от страните му по закона: *ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване.* Докажете, че топката никога няма да се върне във върха A.

Решение: Нека топката излита под ъгъл α спрямо страната AB на многоъгълника. Тъй като вътрешният ъгъл при върха A е $90°$, то $\alpha \in (0^o, 90^o)$ (при $\alpha = 0^o$ или 90^o топката пада в джоба, намиращ се в съседен на A връх).

Понеже ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване, маршрутът на топката се състои от отсечки, които сключват ъгъл α или $180^o - \alpha$ с AB. Тъй като $\sphericalangle A = 90^o$, за да се върне в A, топката трябва да "влезе" в A под ъгъл α. Това означава, че в някоя точка от маршрута топката се отразява под ъгъл 180^o спрямо дотогавашната си траектория и започва да се връща. Това обаче е невъзможно, тъй като $\alpha \neq 0^o, 90^o$.

Метод на крайния елемент

Задача 1. В редица са записани няколко числа. Петър избира две съседни числа, лявото от които е по-малко от дясното, разменя им местата и едновременно с това ги умножава по 2. Докажете, че Петър може да направи само краен брой такива операции.

Решение: Нека числата са записани на картончета и подредени в редица. Ще докажем, че две картончета, които веднъж са си сменили местата, не могат да се върнат обратно. Ако допуснем противното и разгледаме двойката (A, B), която първа се е върнала, е ясно, че между двете размествания на A и B е имало поне една операция с A или B. Нека тя е с A. След нея картончето C, което се е сменило с A, попада между A и B. Повече то не се разменя с A (допуснахме, че първият обратен обмен е (A, B)). То не може и да остане между тях (иначе не биха могли да се разменят повторно). Следователно C се размества с B. Това означава, че на всяко разместване на A съответства разсместване на B, т.е. те са се удвоявали равен брой пъти и по този начин дясното остава по-голямо от лявото, т.е. повторна тяхна размяна е невъзможна.

Следователно общият брой операции не надхвърля броя на двойките числа, т.е. $\binom{n}{2}$.

Задача 2. Нека n е фиксирано просто число, по-голямо от 3. Един триъгълник ще наричме *приемлив*, ако градусната мярка на всеки негов ъгъл е от вида $\dfrac{180m}{n}$ за някое естествено число m. Отначало на масата има един приемлив триъгълник. Позволява се да се вземе триъгълник от масата и да се разреже на два приемливи триъгълника, нито един от които не е подобен на някой от тези на масата. Двата получени триъгълника също се поставят на масата. Докажете, че в момента, в който следващо разрязване е невъзможно, всеки приемлив триъгълник е подобен на някой от триъгълниците на масата.

Решение: Ако приемем ъгъла $\dfrac{180^\circ}{n}$ за 1, то сборът от ъглите на триъгълник ще бъде n. Ще описваме триъгълниците с тройки ъгли. Да разделим приемливите триъгълници на присъстващи (като части на масата) и отсъстващи.

Нека a е най-малкият ъгъл измежду ъглите на отсъстващите триъгълници. Избираме всички отсъстващи триъгълници с ъгъл a, отбелязваме в тях по един ъгъл a, а останалите им ъгли ще наречем допълнителни (някои допълнителни също могат да бъдат равни на a). Измежду допълнителните ъгли избираме ъгъл b – най-големия кратен на a (ако има такъв) или просто най-големия (ако няма кратни на a). Разглеждаме отсъстващия триъгълник (a, b, c).

Ще докажем, че триъгълник $(a, a+b, n-2a-b)$ присъства. Измежду допълнителните ъгли няма равен на $a+b$, тъй като в обратен случай бихме избрали него вместо b. Затова е достатъчно да покажем, че $n-2a-b > 0$. От избора на a следва, че $c \geq a$, оттук $n-2a-b = (a+b+c)-2a-b = c-a \geq 0$, като равенство е възможно само ако $c = a$. Но ако $c = a$, то измежду допълнителните ъгли има кратни на a, следователно и b е кратен на a, откъдето и простото n е кратно на a – противоречие.

Остана да разрежем присъстващия триъгълник $(a, a+b, n-2a-b)$ така, че ъгъл $a+b$ да се раздели на ъгли a и b и да се получат триъгълници $(b, a, ...)$ и $(a, n-2a-b, ...)$, т.е. отсъстващия (b, a, c) и $(a, n-2a-b, a+b)$, подобен на разрязания.

Задача 3. В безкрайна редица от естествени числа всяко следващо число X' се получава от предишното X чрез прибавяне към X на една от ненулевите цифри на X. Докажете, че задължително в тази редица ще се появи и четно число.

Решение: Да допуснем, че всеки член на редицата x_n е нечетен. В записа на x_1 участва поне една четна цифра, иначе x_2 ще е четно. Разглеждаме тази четна цифра k от записа на x_1, която стои в най-висок разряд (най-вляво). Тъй като редицата расте неограничено, съществува неин член x_m, при който k за първи път преминава в $k+1$. Ясно е, че цифрите с по-висок разряд остават непроменени, а цифрите вдясно, освен последната, са 0. Следователно всички ненулеви цифри на x_m са нечетни. Това означава, че x_{m+1} е четно число, противоречие.

Задача 4. Дадена е редица, първите два члена на която са 1 и 2 съответно, а всеки следващ член е най-малкото естествено число, което още не се е срещало в редицата и което не е взаимно просто с предишния член на редицата. Докажете, че всяко естествено число е член на тази редица.

Решение: Първо ще докажем, че съществува просто число p, което е делител на безброй много членове на редицата.

Да допуснем, че всяко просто число е делител на краен брой членове на редицата. Нека N е най-голямото четно число в редицата. Съществува число M от редицата, което няма по-малък от N прост делител (иначе всички прости делители на числата в редицата ще са по-малки от N, т.е. краен брой и следователно някое от по-малките от N прости числа ще дели безброй много членове на редицата). Ако най-малкият прост делител на

M е q, то $2q > q > N$ и следователно $2q$ не е член на редицата. От друга страна, според дефиницията на редицата следващият член след M е $2q$; противоречие.

Нека сега простото число p дели безкрайно много членове на редицата и нека q е друго просто число. За всяко естествено число n съществува член на редицата L такъв, че p/L и всеки от следващите членове е по-голям от pq^n. Тъй като pq^n и L не са взаимно прости и следващият след L член е по-голям от pq^n, то pq^n трябва да предхожда L в редицата. Получихме, че съществуват безброй много членове на редицата, кратни на q. Следователно всяко просто число дели безброй много членове на редицата.

Да предположим, че K е най-малкото естествено число, което не се среща в редицата и q е негов прост делител. Тъй като има безброй много членове на редицата, кратни на q, то съществува член P такъв, че q/P и всяко от числата $1, 2, \dots, K-1$ предхожда P в редицата. Тъй като P и K не са взаимно прости, то следващият след P член трябва да бъде K, което е противоречие.

Задача 5. Петър има таблица 5×5, попълнена с 25 различни числа. Петър избира най-голямото число в таблицата и зачертава реда и стълба, в които се намира то. След това избира най-голямото от останалите числа, зачертава реда и стълба в които се намира то и т.н. Иван има същата таблица и постъпва по подобен начин, но всеки път избира най-малкото число. Възможно ли е сборът на числата, избрани от Иван, да е по-голям от сбора на числата, избрани от Петър?

Решение: Да означим числата в реда на тяхното избиране: Петър избира b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, а Иван – m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Ще докажем, че ако $i + j < 5$, то $b_i \geq m_j$.

Индексът е равен на броя редове и броя стълбове, зачертани преди избора на съответното число. Например, при избора на b_1 са били зачертани един ред и един стълб, а при избора на m_3 – три реда и три стълба. Преди Петър да избере b_1 и Иван да избере m_3, общо са били зачертани най-много 4 реда и 4 стълба. Следователно поне едно число a е незачертано и в двата случая. Петър избира най-голямото от незачертаните числа, затова $b_1 \geq a$; Иван избира най-малкото от останалите, затова $m_3 \leq a$. Следователно $b_1 \geq m_3$. Аналогично доказваме, че $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$ и $b_4 \geq m_0$, т.е. сборът на Петър е не по-малък от сбора на Иван.

Математическа индукция

Задача 1. По колко различни начина числото 2004 може да се представи като сбор на приблизително равни естествени числа? Две числа се наричат приблизително равни, ако разликата им е не повече от 1. Сборовете, които се различават само по реда на събираемите, се смятат за еднакви.

Решение: Ще докажем, че числото N може да се представи по N начина като сбор на приблизително равни събираеми.

Да отбележим, че във всяко представяне участват най-много две различни събираеми (от вида a и $a+1$, съответно ”малко” и ”голямо”).

Числото 1 има едно представяне: с едно събираемо 1. Нека твърдението е доказано за някое N. Като прибавим във всяко представяне на N единица към едно от по-малките събираеми (или към кое да е, ако всички са равни), получаваме представяне на числото $N+1$. Ясно е, че от различни представяния на N се получават различни представяния на $N+1$.

Обратно, ако във всяко представяне на $N+1$ (освен представянето на $N+1$ като сбор на единици) едно от по-големите събираеми се намали с 1 (или, ако събираемите са равни, кое да е от тях се намали с 1), се получава представяне на N. Отново, от различни представяния на $N+1$ се получават различни представяния на N.

Следователно броят на представянията на $N+1$ е с 1 по-голям от броя на представянята на N и по индукция твърдението е доказано.

Задача 2. Разполагаме с много картончета, на всяко от които е записано естествено число от 1 до n. Сборът от записаните на всички картончета числа е равен на $k.n!$, където k е естествено число. Докажете, че картончетата могат да се разпределят в k групи така, че във всяка група сборът от записаните на картончетата числа да е равен на $n!$.

Решение: Ще приложим индукция по n. При $n=1$ твърдението очевидно е изпълнено. Нека е вярно за $n-1$ и нека разгледаме множество с елементи $1, 2, \ldots, n$, чиято сума е $k.n!$.

Първо да отделим картончетата, на които е записано числото n и всяко от тях да сложим в плик, надписан с 1. След това да разгледаме произволни n картончета измежду останалите. Известно е, че измежду записаните на тях числа можем да изберем няколко с кратен на n сбор. Тези няколко картончета със сума tn слагаме в плик, надписан с t. Тъй като броят на числата в плика не надхвърля n и всяко от тях е най-много $n-1$, то $t \leq n-1$. С оставащите картончета постъпваме по същия начин, докато накрая имаме $r < n$ на брой картончета. Тъй като сборът от числата, записани върху всички картончета, е кратен на n и сборовете във всеки плик са също кратни на n, то сборът от числата на тези r картончета е също кратен на n, т.е. равен на nq (ясно е, че $q < n$). Така и последните r картончета слагаме в плик и го надписваме с q.

Всички пликове са надписани с числата $1, 2, \ldots, n-1$ и сборът от записаните върху пликовете числа е $\dfrac{k.n!}{n} = k.(n-1)!$. От идукционното предположение следва, че пликовете можем да разпределим в k групи така, че сборът от числата върху пликовете във всяка група да бъде $(n-1)!$. Това означава, че сборът от записаните върху картончетата от пликовете във всяка от тези групи числа е $n!$, с което индукцията е завършена.

Задача 3. Компания театрали изкупила билетите от цял ред, като се разположила там по произволен начин. Оказало се, че никой не е седнал на мястото си. Разпоредителят има право да размества помежду им само двойки съседи, и то ако всеки от тях не седи на мястото си. Винаги ли е възможно разпоредителят да размести зрителите така, че всеки да седне на своето място?

Решение: Да номерираме зрителите по номерата на билетите им: $1, 2, \ldots, n$. Ако разпоредителят успее да постави n-тия зрител на мястото му, а всички останали да не седят по местата си, с индукция по броя на зрителите ще получим, че е желаното разпределение е възможно. При това е достатъчно да посочим начин, по който n-тия зрител може да се премести по-близо към мястото си (например, надясно), като отново всички седят не по местата си. Ясно е, че след краен брой такива премествания n-тия зрител ще седне на мястото си.

Седящият на място k зрител n не може да се измести на едно място надясно, само ако на място $k+1$ седи зрител k. Тогава ще опитаме първо да изместим зрител k на едно място надясно, а след това да преместим и n-тия зрител. Това няма да бъде възможно, само ако на място $k+2$ седи зрител $k+1$. Но тогава ще опитаме да преместим $k+1$-вия зрител надясно, после k-тия и накрая n-тия. Отново, това би било невъзможно, само ако на $k+3$-то място седи зрител $k+2$. Продължавайки с аналогични разсъждения, стигаме до единствената ситуация, при която n-тия зрител не може да бъде преместен надясно, без някой друг да си седне на мястото: на местата $k, k+1, k+2, \ldots, n$ седят съответно зрителите $n, k, k+1, \ldots, n-1$. В такъв случай, като разместим n-тия зрител с десния му съсед $n-k$ пъти, ще получим разположение, при което последните $n-k+1$ зрители са по местата си, като по този начин свеждаме задачата към по-малък брой зрители и използваме индукционното предположение.

Задача 4. В редица са поставени 23 кутии с топки, като за всяко естествено число n от 1 до 23 има кутия с точно n топки. С една операция може да се преместят в произволна кутия още толкова топки, колкото вече има в нея, взети от кутия с повече топки. Винаги ли е възможно с последователност от такива операции в първата кутия да остане 1 топка, във втората - две и т.н., в 23-тата кутия - 23 топки?

Решение: Твърдението е вярно за произволен брой кутии (не само 23). Доказателството е с индукция по броя на кутиите.

Тривиалната ситуация "една кутия с една топка" дава базата на индукцията.

Нека $n-1$ кутии могат да се подредят според изискванията на условието и имаме n кутии.

Забелязваме, че с последователно преместване на топките от първата кутия във втората, от втората в третата и така до k-тата, от разпределението $(k, k-1, k-2, \ldots, 3, 2, 1)$ получаваме $(1, k, k-1, \ldots, 3, 2)$ за всяко $k \geq 2$. Продължавайки циклично, от втората кутия удвояваме топките в третата, от третата в четвъртата и т.н., от k-тата в първата. Така стигаме до разположението $(2, 1, k, k-1, k-2, \ldots, 4, 3)$.

С няколко такива цикъла, кутията с k топки може да заеме мястото на кутията с $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1 топки. При това останалите кутии съдържат различен брой топки. Аналогично това е вярно за произволно първоначално разпределение.

Тогава, след като направим нужния брой циклични премествания за n-тата кутия и тя се окаже на последното n-то място, според индукционното предположение можем да подредим и останалите кутии с $1, 2, \ldots, n-1$ топки.

Задача 5. Карлсон има 1000 буркана със сладко. Бурканите не са задължително еднакви, но всеки от тях съдържа не повече от 1% от всичкото сладко. За закуска Карлсон може да изяде по едно и също количество сладко от кои да е 100 буркана. Докажете, че Карлсон може да закусва така, че за няколко дни да изяде всичкото сладко.

Решение: Ще докажем твърдението по индукция.

Да предположим, че Карлсон може да изяде всичкото сладко, ако вместо 100 и $\dfrac{1}{100}$ в условието имаме 99 и $\dfrac{1}{99}$ (общото количество буркани не е важно, същественото е, че те са достатъчно много, не по-малко от 100). Ще наричаме тези задачи съответно "задача-100" и "задача-99". Ще обясним как, след като е решил задача-99, Карлсон може да реши задача-100.

Карлсон мислено разделя бурканите със сладко на две части: най-големия (по количество на сладкото) и ”всички останали”. Да отбележим, че за “всички останали” буркани се изпълнява условието на задача-99 (в ”останалите” буркани сладкото е не по-малко от $\frac{99}{100}$ от цялото сладко и във всеки от ”останалите” буркани е не повече от $\frac{1}{100}$ от цялото сладко, т.е. не повече от $\frac{1}{100} : \frac{99}{100} = \frac{1}{99}$ от количеството сладко в ”останалите” буркани).

Затова Карлсон може да действа така: да изяде от ”останалите” буркани всичкото сладко по алгоритъма на ”задача-99”, като на всяка стъпка взема 99 буркана от ”останалите” и добавя стотния буркан – “най-големият”. За да свърши едновременно сладкото в ”най-големия” буркан и във ”всички останали”, е необходимо в него да има точно 99 пъти по-малко сладко, отколкото във ”всички останали” взети заедно (тъй като от него всеки път ще се изяжда 99 пъти по-малко, отколкото от “останалите”). Тоест е необходимо в най-големия буркан първоначално да е имало точно $\frac{1}{100}$ част от общото количество сладко.

Ако в най-големия буркан има по-малко от $\frac{1}{100}$ от общото количество сладко, Карлсон избира 100 непразни буркана от “всички останали” и изяжда от тях някакво количество сладко. При това частта сладко в най-големия буркан се увеличава. Ще покажем как трябва да действа той, за да направи тази част точно $\frac{1}{100}$. Ако количеството сладко в най-малкия буркан (от избраните сто) позволява да се изяде част от сладкото така, че частта на най-големия буркан да стане равна на $\frac{1}{100}$, той прави така. Иначе изяжда всичкото сладко от най-малкия буркан, намалявайки количеството на непразните буркани. Карлсон спира или когато постигне целта, или когато непразните буркани сред ”всички останали” станат по-малко от 100. Но последният случай е невъзможен, тъй като частта на най-големия буркан е не по-малка от $\frac{1}{100}$, т.е. Карлсон е трябвало да спре по-рано.

За да завършим решението ще отбележим, че по начина, по който сведохме задача-100 към задача-99, може да я сведем сега към задача-98, нея – към задача-97, и т.н. А задача-1 е очевидна.

Една задача за разрязване

Задача 1. Докажете, че ако съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $a \times b$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $c \times d$, то съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $c \times d$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $a \times b$.

Решение: За удобство ще означим с A правоъгълниците $a \times b$, а с B правоъгълниците с размери $c \times d$. Нека P е правоъгълник, подобен на A, нарязан на правоъгълници B. Тогава неговите размери са $(pc{+}qd)\times(rc{+}sd)$, където p, q, r, s са неотрицателни цели числа.

Първи случай. Нека отношението на страните на B е рационално, т.е $c : d = m : n$, където m иi n са естествени числа. Тогава отношението на страните на P е $(pc + qd) : (rc + sd) = (p(c : d) + q) : (r(c : d) + s)$, също рационално. От подобието на P и A следва, че и отношението на страните на A е рационално: $a : b = k : l$, където k и l са естествени числа. Но тогава от kl еднакви на A правоъгълника може да се сглоби квадрат. (Като разположим в ред l такива правоъгълника, за да се получи правоъгълник с височина b и дължина la; под него – още един такъв ред и т.н. общо k реда; получаваме квдарат със страна $la = kb$.) От такива квадрати сглобяваме правоъгълник, подобен на B, като mn квадрата се разположат в n реда, съставени от по m квадрата.

Втори случай. Нека отношението на страните на B е ирационално. Ще докажем следното твърдение:

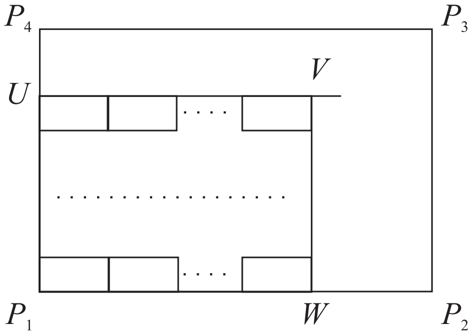
Всички правоъгълници, на които е нарязан правоъгълника P, са еднакво ориентирани (т.е. всички техни по-големи страни са успоредни).

Да отбележим, че ако дадено число се пресдставя във вида $zc{+}td$, където z и t са цели числа, то z и t са еднозначно определени. Това е така, защото ако $zc{+}td = z'c{+}t'd$, където z' и t' са цели числа, то $(z{-}z')c = (t{-}t')d$, и при $z \neq z'$ отношението $c : d$ ще бъде рационално, противоречие; следователно $z = z'$ и тогава и $t = t'$.

Нека P има върхове P_1, P_2, P_3, P_4 (виж чертежа). Нека от този ъгъл $_1$ е изрязан правоъгълник, чиято по-дълга страна е хоризонтална. Разглеждаме най-големия правоъглник от вида P_1UVW, който е нарязан на правоъгълници, всички по-дълги страни на които са хоризонтални (U лежи на P_1P_2, а W на P_1P_4).

Да допуснем, че точка V е вътрешна за P. Разглеждаме правоъгълниците от разрязването (извън P_1UVW), прилежащи към страната UV. Техните по-дълги страни не са всичките хоризонтални, защото иначе правоъгълникът

$PUVW$ не е най-големият. Аналогично не са хоризонтални всички по-дълги страни на правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW.



Ако допуснем, че правоъгълниците от разрязването извън P_1UVW, прилежащи към UV, не излизат вдясно след страната UV, ще получим, че дължината на UV се представя по два начина във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие. Следователно тези правоъгълници излизат вдясно. Но тогава правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW, не излизат нагоре от страната VW, т.е. дължината на VW по два начина се представя във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие.

Случаят, когато точката V лежи на границата на правоъгълника P, но не съвпада с P_3, по аналогичен начин води до противоречие.

Следователно V съвпада с P_3, с което твърдението е доказано.

Но тогава отношението на страните на A е равно на $(zc) : (td)$, където z и t са цели числа. Нека $(zc) : (td) = a : b$. Тогава $(ta) : (zb) = c : d$ и можем да получим правоъгълник, подобен на B, разполагайки еднакви с A правоъгълници в редове така, че техните равни на a страни да бъдат хоризонтални, като във всеки ред има по t правоъгълника, а редовете са общо z.